PROJETS DE FIN DE LISANS DES ÉTUDIANTS DE QUATRIÈME ANNÉE
LISTE DES SUJETS PROPOSÉS PAR LES ENSEIGNANTS

1. Courbes Algébriques Planes et théorème de Bézout (Gülay KAYA)

Une courbe algébrique dans le plan complex $\mathbb{C}^2$ est un ensemble de points qui sont les zéros d'une fonction polynômiale.

Objectifs. Le but de ce projet est de comprendre les fondements de la théorie des courbes algébriques planes et le théorème de Bézout. Le théorème de Bézout dit que le nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques peut être déterminé par leurs degrés.

Références à lire

[1] Gred FISCHER, Plane algebraic curves. (chapitre 1 et 2).

[2] Frances KIRWAN, Complex Algebraic Curves.

[3] Ernst KUNZ, Introduction to Plane Algebraic Curves.

[4] Terrence TAO, Bezout's inequality, blog.
`http://terrytao.wordpress.com/2011/03/23/bezouts-inequality/`

2. Formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$ (Gülay KAYA)

Une forme modulaire est une fonction holomorphe sur le demi-plan de Poincaré qui satisfait certaines conditions comme l'invariance par rapport à l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$.

Références à lire

[1] Fred DIAMOND, A first course in Modular Forms. (chapitre 1)

3. Axiome du choix et démonstration du paradoxe de Banach-Tarski (Cédric MILLIET)

Tout le monde sait ce qu'est un *ensemble* : un sac avec des éléments. Les ensembles sont des objets fondamentaux en mathématiques puisque les mathématiciens les utilisent tous les jours sans même y penser. Pourtant les mathématicien ne sont pas d'accord sur la définition d'ensemble. Si A et B sont deux ensembles non vides, il est facile de montrer que le produit cartésien $A \times B$ est non vide. *L'axiome du choix* dit que si $A_1, A_2, \ldots$ est une famille d'ensembles non vides, alors le produit $A_1 \times A_2 \times \ldots$ est non vide. C'est un *axiome*, comme par exemple le postulat de « la »parallèle en géométrie Euclidienne : il ne se démontre pas, ni ne se réfute ; certains mathématiciens choisissent de travailler avec cet axiome parce qu'il a des conséquences importantes et utiles (l'existence d'une base dans tout ev, l'existence de la mesure de Lesbegue etc.) ; d'autre préfèrent le refuser. Une raison de ce refus est que l'axiome du choix a des conséquences surprenantes (l'existence de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non mesurables), voir *paradoxales*, comme le paradoxe de Banach-Tarski.

On appelle *paradoxe* un fait qui semble contredire notre intuition naturelle. Le paradoxe de Banach-Tarski (Stefan Banach et Alfred Tarski, 1924) est un théorème qui affirme que l'on peut décomposer une boule de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux disjoints que l'on peut réarranger pour reformer deux boules identiques à la boule de départ. Ce théorème utilise l'axiome du choix.

Objectifs. L'objectif du travail est d'introduire l'axiome du choix sous différentes formes, et de comprendre la preuve du paradoxe de Banach-Tarsk donnée dans [4]. On commencera par un cas analogue simple exposé dans [3] : en dimension 1, pour un intervalle de la droite réelle. Si le temps le permet, on introduira les groupes moyennables et on lira [5].

Références à lire

[1] David MADORE, Le paradoxe de Banach-Tarski.
http://www.madore.org/~david/math/bantar.pdf

[2] Alexandre REISSMAN, Le paradoxe de Banach-Tarski, Le journal de maths des élèves de l'ENS Lyon, 1 (1994) 59–62.
http://www.umpa.ens-lyon.fr/JME/Vol1Num1/artAReissman/artAReissman.pdf

[3] Terrence TAO, The axiom of choice and Banach-Tarski paradoxes.
http://www.math.ucla.edu/~tao/resource/general/121.1.00s/tarski.html

[4] Terrence TAO, The Banach-Tarski Paradox.
http://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf

[5] Romain TESSERA et Yves DE CORNULIER, Paradoxe de Banach-Tarski et groupes moyennables (2001).
http://www.normalesup.org/~tessera/wexpma2.pdf

[6] Wikipedia, Banach-Tarski Paradox (version anglaise).
http://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox

4. Théories, modèles et démonstration du théorème de compacité de Gödel-Maltsev (Cédric MILLIET)

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne $\times$ qui vérifie trois propriétés : associativité, existence d'un élément neutre et d'un inverse pour chaque élément de G. C'est un objet qui a de nombreuses facettes et sur lequel on peut se poser des questions de nature très diverses :

(1) *géométrique* : est-ce le groupe de symétrie d'un objet particulier, par exemple le groupe d'isométries d'un espace métrique ? Quelle est la géométrie de son graphe de Cayley ?

(2) *algébrique* : quelle est sa structure ? Est-il finiment engendré ? Finiment présenté ? Abélien ? Quel est son centre ?

(3) *analytique* : est-il muni d'une structure de variété différentielle ?

On peut aussi avoir un regard plus abstrait, un regard de *logicien* et se demander quelles sont tous les *énoncés* vrais dans G. Pour cela il faut préciser ce qu'est un énoncé : c'est un *mot* fini qui utilise la loi de groupe, des connecteurs logiques, des variables, des quantificateurs et des parenthésages. Par exemple, l'énoncé suivant affirme que le groupe est abélien et possède au moins deux éléments distincts :

$$\Big((\forall x)(\forall y)(xy = yx)\Big) \wedge \Big((\exists x)(\exists y)(x \neq y)\Big)$$

On appelle *théorie de* G l'ensemble de tous les énoncés qui sont vrais dans G. On la note $Th(G)$, et on dit que G est un *modèle de* sa théorie $Th(G)$.

Objectifs. Le but du travail sera de se familiariser avec la notion de théorie et de modèle d'une théorie, et d'étudier une preuve du théorème de compacité de Gödel-Maltsev (1930 et 1936) qui dit la chose suivante : si toute partie finie d'une théorie T a un modèle, alors T a un modèle. Ce théorème a des applications importantes et surprenantes, par exemple en *analyse non-standard* : on peut en déduire qu'il existe un sur-corps de $\mathbb{R}$ qui a la même théorie que $\mathbb{R}$ et qui possède des éléments infiniment petits. La preuve de ce théorème utilise la notion de filtre, d'ultrafiltre, et l'axiome du choix.

Références à lire

[1] Dave JENSEN, Non-standard analysis, 2007.
http://www.ma.utexas.edu/users/djensen/Nonstandard%20Analysis.pdf

[2] Daniel LASCAR, La théorie des modèles en peu de maux, Cassini 2009. (chapitres 1 et 2)

[3] Bruno POIZAT, Cours de théorie des modèles, Bruno Poizat, 1985. (pages 1 à 71)

[4] Abraham ROBINSON, Non-standard analysis, North-Holland publishing company, 1966. (pages 1 à 58)

5. Brève introduction aux groupes hyperboliques au sens de Gromov (Cédric MILLIET)

Soit un groupe G. On dit qu'une partie S de G est *génératrice* si tout élément de G peut s'écrire comme produit d'éléments de S. Par exemple, $\{1, -1\}$ est une partie génératrice de $(\mathbb{Z}, +)$; l'ensemble des nombres premiers est une partie génératrice de $(\mathbb{Z}^*, \times)$. On peut associer à G son *graphe de Cayley* Γ (qui dépend de S) : les sommets de Γ sont les éléments de G, et on relie deux sommets x et y par une arrête si et seulement si $xy^{-1} \in S$, i.e. si et seulement si on peut passer de x à y en multipliant par un élément de S. Le graphe Γ a une structure d'espace métrique : la distance entre deux sommets x et y est tout simplement le plus court « chemin »reliant x à y. On dit que Γ est un *groupe hyperbolique au sens de Gromov* si Γ est un *espace métrique hyperbolique*, c'est-à-dire si les triangles de Γ « ressemblent »aux triangles de l'hyperboloïde de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ pour $z > 0$. Cette notion date des années 1980.

Objectifs. On commencera à lire [1] et [5] pour une introduction en images. Puis le travail comportera trois parties : une partie de *théorie des groupes* [4] (groupe de type fini, groupe libre à n générateurs, groupe présenté par générateur et relations, graphe de Cayley), une partie *géométrique* (espaces métriques hyperboliques, exemple de l'hyperboloïde), et enfin une brève introduction aux *groupes hyperboliques*. Si le temps le permet, on essayera de comprendre pourquoi les groupes fondamentaux de certaines surfaces sont des groupes hyperboliques.

Références à lire

[1] Etienne GHYS, Les triangles d'Euclide, de Gauss et de Gromov, un tout petit bout de l'oeuvre de Misha Gromov, 2009. `http://images.math.cnrs.fr/Les-triangles-d-Euclide-de-Gauss.html`

[2] Etienne GHYS, Les groupes hyperboliques, Séminaire Bourbaki, 42ème année (1990) n.722. (pages 203 à 216) `archive.numdam.org/article/SB_1989-1990__32__203_0.pdf`

[3] Etienne GHYS, Pierre DE LA HARPE, Sur les groupes hyperboliques, d'après Mikhael Gromov, Progress in Mathematics 83 (1990) Birkhaüser. (chapitres 1 et 2)

[4] Clara Löh, Geometric group theory, an introduction, 2011. (chapitres 1 à 3) `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf`

[5] Math Explorer's Club, Groups and Geometries. `http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/Victor/main.htm`

6. Systèmes dynamiques et bifurcations de champs de vecteurs, ses applications aux dynamiques de phénomènes économiques (Susumu TANABE)

Objectifs. Maîtrise des notions fondamentales de systèmes dynamiques (un système d'équations différentielles avec des dérivées uniquement par rapport au temps). On étudie l'application de la technique de systèmes dynamiques et de la théorie de bifurcation aux oscillations non-linéaires, aux dynamiques de phénomènes économiques. Les propriétés géométriques et topologiques des solutions des équations différentielles jouent un rôle central.

Mots Clefs. Exposants de Lyapunov, application de Poincaré, portrait de phase, variété stable et non-stable, système hamiltonien, équation de Hamilton-Jacobi.

Références à lire

[1] John Guckenheimer, Philip Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences, Springer (chapitres 1 à 4).

[2] William Brock, A.G. Malliaris, Differential equations, stability and chaos in economic dynamics, Elsevier Science (chapitres 1 à 6).

7. Groupes fuchsiens (Susumu TANABE)

Objectifs. Maîtrise de notions fondamentales de la théorie algébrique des surfaces de Riemann. Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{+I, -I\}$. Le groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ peut être considéré comme un groupe d'isométries d'un plan hyperbolique ou bien de transformations conformes soit d'un disque unité, soit du demi-plan hermitien (i.e. des nombres complexes avec la partie imaginaire positive). Un groupe fuchsien donc, agit de manière discrète sur un des ces espaces. Il est utilisé pour construire des modèles fuchsiens des surfaces de Riemann. Les groupes fuchsiens jouent un rôle important en géométrie non euclidienne, en particulier en géométrie hyperbolique. C'est Henri Poincaré (1882) qui étudia le premier les groupes fuchsiens généraux, inspiré par les recherches précédents de Lazarus Fuchs.

Mots Clefs. $PSL(2, \mathbb{R})$, groupe de Lie, groupe discret, groupe fuchsien, géométrie hyperbolique, surface de Riemann.

Références à lire

[1] Svetlana Katok, Fuchsian groups, Chicago lecture notes in Mathematics.

8. Surfaces à singularités non-isolées obtenues par les algèbres de Lie (Meral TOSUN)

Références à lire

[1] P. SLODOWY, Simple singularities and simple Lie algebras.
[2] M.TOSUN et K. NAKAMOTO, Some surface singularities obtained via Lie algebras.

9. Résolution de Jung (Meral TOSUN)

Références à lire

[1] LAUFER, two dimensional singularities.
[2] J. SNOUSSI, Base points of polar curves on a surface.

10. Le complexe de Bergman et arbres Phylogenetiques (Meral TOSUN)

Références à lire

[1] C. SEMPLE, M. STEEL, Phylogenetics.
[2] F. ARDILA et C.J. KLIVANS, The Bergman complex of a Matroid and Phylogenetic Trees.

11. Quivers et diviseurs libres (Meral TOSUN)

Références à lire

[1] D. MOND, Free divisors and quivers representations.

12. Groupe de Thompson (Muhammed ULUDAĞ)

13. Nombres p-adiques 3 (Muhammed ULUDAĞ)

14. Formes binaires quadratiques (Muhammed ULUDAĞ)

15. Catégories (Muhammed ULUDAĞ)

16. Groupe Modulaire (Muhammed ULUDAĞ)

17. Fractions continues (Muhammed ULUDAĞ)

18. Groupe fondamental (Muhammed ULUDAĞ)

19. Équilibre de Cournot/équilibre de Bertrand en théorie des jeux (Aysegül YILDIZ ULUS)

Objectifs. Dans un modèle de deux firmes avec les biens différenciés, la comparaison de l'équilibre de Cournot et l'équilibre de Bertrand en utilisant la théorie de jeux, dans le contexte de la consommation, de la production et du bien-être.

20. (Aysegül YILDIZ ULUS)

Objectifs. Dans cette thèse, on utilisera les jeux répétés et les stratégies de Grim-Trigger. Dans un modèle de deux firmes avec les biens différencies, on recherchera le facteur critique d'escompte qui vérifie la durabilité de fusion des firmes et on associera ce facteur au degré de différenciation.

21. (Aysegül YILDIZ ULUS)

Objectifs. La théorie de point fixe pour les correspondances : une extension aux domaines non-concaves et applications à la théorie de l'équilibre économique.

22. (Aysegül YILDIZ ULUS)

Objectifs. Applications économiques des équations différentielles et des équations de récurrences.