

Cédric Milliet

Cours de
TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES

Version préliminaire

Cours de troisième année de *Lisans*
Université Galatasaray, 2012

Cédric Milliet
Université Galatasaray
Faculté de Sciences et de Lettres
Département de Mathématiques
Çırağan Caddesi n°36
34357 Ortaköy, İstanbul, Turquie
Mél : milliet@math.univ-lyon1.fr
Site internet : <http://math.gsu.edu.tr/milliet>

SOMMAIRE

Introduction	5
1. Espaces métriques	7
1.1 Quelques inégalités	7
1.2 Vocabulaire de base	7
1.3 Exemples d'espaces métriques	8
1.4 Obtention de distances.	10
1.5 Notions métriques.	10
1.6 Notions topologiques	11
2. Espaces topologiques	15
2.1 Définitions	15
2.2 Propriétés	15
2.3 Distance induite. Topologie induite.	15
3. Suites	17
3.1 Suite convergente. Limite.	17
3.2 Suite extraite. Valeurs d'adhérence	17
3.3 Caractérisation séquentielle des fermés	18
3.4 Suites de Cauchy. Parties complètes d'un espace métrique.	18
3.5 Exemples d'espaces complets	19
3.6 Complété d'un espace métrique	20
4. Applications continues	21
4.1 Limite d'une application	21
4.2 Continuité.	21
4.3 Caractérisation séquentielle de la continuité	22
4.4 Caractérisation topologique de la continuité	22
5. Compacité	23
5.1 Définitions, propriétés	23
5.2 Compacité et continuité	24

INTRODUCTION

Le mot *topologie* vient du grec *topos* et *logos* qui signifient « lieu » et « étude » ; mot à mot, c'est donc « l'étude du lieu ». Plus précisément c'est l'étude de la notion de proximité : comment dire précisément si deux points d'un espace sont proches l'un de l'autre, i.e. *voisins*, ou si une suite de points *tend* vers un point donné ? La topologie tente de donner un sens précis à la notion de voisinage, de *limite* et de *fonction continue* entre deux espaces (i.e. de fonction qui préserve la notion de voisinage). Nous verrons qu'un *espace topologique* est un espace où il existe une notion très abstraite de voisinage.

Les espaces topologiques les plus simples sont les *espaces métriques* introduits par Maurice Fréchet (1906) qui possèdent une notion de *distance* : il est facile de dire si deux points sont proches si l'on dispose d'une *distance* mesurant leur éloignement. Ce sont les espaces que nous allons étudier principalement dans ce cours. Nous parlerons aussi brièvement des *espaces topologiques*, qui furent introduits par Felix Hausdorff (1914) et Kazimierz Kuratowski (1922).

CHAPITRE 1

ESPACES MÉTRIQUES

1.1 Quelques inégalités

Lemme 1.1 (Moyennes géométrique et arithmétique) Soit λ un réel de $]0, 1[$. Pour tous réels x et y strictement positifs, on a

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1 - \lambda)y$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder) Soient p et q deux réels positifs vérifiant $1/p + 1/q = 1$. Pour tous réels positifs x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n , on a

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}$$

Remarque. Si p et q sont égaux à 2, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Théorème 1.3 (Inégalité de Minkowsky) Soit $p > 1$ un réel. Pour tous réels positifs x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n , on a

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}$$

Théorème 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique positive sur E . Pour tout x et y dans E , on a

$$|\langle x | y \rangle| \leq \langle x | x \rangle^{1/2} \langle y | y \rangle^{1/2}$$

1.2 Vocabulaire de base

Définition 1.5 (Distance) Soit X un ensemble. On appelle *distance sur X* toute application d de $X \times X$ dans \mathbb{R}^+ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. *Séparation.* Pour tout x et y dans X , on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. *Symétrie.* Pour tout x et y dans X , on a $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Inégalité triangulaire.* Pour tout x, y , et z dans X , on a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Remarque. Si d est une distance sur X , pour tout x, y et z dans X , on a l'inégalité

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Définition 1.6 (Distances équivalentes) Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X . On dit que d_1 et d_2 sont *équivalentes* s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que, pour tout x et y dans X , on ait

$$d_1(x, y) \leq \alpha \cdot d_2(x, y) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

Remarque. Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur X .

Définition 1.7 (espace métrique) On appelle *espace métrique* tout couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X .

Définition 1.8 (isométrie) Si (X, d) et (Y, δ) sont deux espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une application, on dit que f est une *isométrie* si c'est une bijection qui conserve la distance, c'est-à-dire si pour tout x et y de X on a

$$\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

On dit alors que X et Y sont *isométriques*.

Remarque. « Être isométrique » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces métriques.

1.3 Exemples d'espaces métriques

Exemple 1.9 (distance discrète) X est un ensemble quelconque muni de la distance

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Exemple 1.10 (degré de parenté) X est la population de la Terre, munie de la distance qui à deux individus x et y associe le chemin le plus court qui les relie dans l'arbre généalogique.

Exemple 1.11 $X = \mathbb{R}$ muni d'une des deux distances suivantes

$$\text{distance usuelle : } d(x, y) = |x - y|$$

$$\text{distance bornée : } \delta(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Exemple 1.12 $X = \mathbb{R}^2$. Soient x et y dans X , et x_1, x_2 et y_1, y_2 leurs coordonnées.

$$\text{distance de Manhattan : } d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$\text{distance euclidienne : } d_2(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{distance infinie : } d_\infty(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

$$\text{distance SNCF : } d_{SNCF}(x, y) = d_2(x, 0) + d_2(y, 0) \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont distincts, et } 0 \text{ sinon}$$

Exemple 1.13 $X = \mathbb{R}^n$. Si x et y sont dans X , on appelle x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n leurs coordonnées. Trois distances sur X :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

Exemple 1.14 $X = \mathbb{R}[X]$. Si P et Q sont dans E , on pose $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$.

$$d_1(P, Q) = \sum_{k=0}^n |a_k - b_k|, \quad d_2(P, Q) = \left(\sum_{k=0}^n |a_k - b_k|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad d_\infty(P, Q) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k - b_k|$$

$$\delta_1(P, Q) = \int_0^1 |P(t) - Q(t)| dt, \quad \delta_2(P, Q) = \left(\int_0^1 |P(t) - Q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \delta_\infty(P, Q) = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x) - Q(x)|$$

Exemple 1.15 $X = M_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont dans X , on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$d_1(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|, \quad d_2(A, B) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad d_\infty(A, B) = \sup_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} - b_{ij}|$$

Exemple 1.16 $X = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soient f et g dans X .

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt, \quad d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

Exemple 1.17 $X = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'ensemble des suites bornées à valeurs réelles. Si u et v désignent les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on pose

$$d_\infty(u, v) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n - v_n|$$

Exemple 1.18 $X = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'espace des suites à valeurs réelles dont la série est absolument convergente. On définit

$$d_1(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n - v_n|$$

Exemple 1.19 $X = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'espace des suites à valeurs réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de « carré sommable », c'est-à-dire telles que la série de terme générale $(|u_n|^2)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

$$d_2(u, v) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n - v_n|^2 \right)^{1/2}$$

Exemple 1.20 (distance sphérique)

Exercice. Montrer que toutes ces applications sont des distances. Quelles sont les distances qui sont équivalentes ? Parmi tous ces exemples, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

Exemple 1.21 (espaces vectoriels normés) Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on appelle *norme* sur E une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. *Séparation.* Pour tout x dans E , on a $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. *homogénéité.* Pour tout x dans E et tout λ dans \mathbb{R} , on a $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.
3. *Inégalité triangulaire.* Pour tout x et y dans E , on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que (E, N) est un \mathbb{R} -*espace vectoriel normé*, et on utilise souvent la notation $\|x\|$ pour $N(x)$. Montrer que $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E (on dit que c'est la *distance associée* à la norme N). Dans les exemples précédents, quelles sont les distances qui sont associées à une norme ?

Remarque (norme et distance).

1. Pour parler de norme, il faut être dans un espace vectoriel.
2. Une norme, c'est beaucoup plus fort qu'une distance.

Exemple 1.22 (distance de longueur, espace géodésique) Dans un espace métrique, il est parfois possible de définir la *longueur* $\ell(\gamma)$ d'un chemin γ entre deux points, et donc de parler de « plus court chemin » entre deux points. On appelle *espace géodésique* ces espaces métriques. Dans un espace géodésique, on peut donc naturellement définir une nouvelle distance $d_\ell(x, y)$, la longueur du plus court chemin entre x et y . Cette distance est appelée *distance de longueur*.

Plus précisément, soit (X, d) un espace métrique, x et y deux points de X . Un *chemin* dans X entre x et y est une application *continue* $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On dit que s est une *subdivision* de $[0, 1]$ si s est une suite finie s_1, \dots, s_{n+1} avec $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1} = 1$ et on note S l'ensemble des subdivisions de $[0, 1]$. On définit la *longueur* de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup_{s \in S} \sum_{i=1}^{n(s)} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1}))$$

On a donc

$$d(x, y) \leq \ell(\gamma)$$

Lemme 1.23 (effet d'un reparamétrage) Soient γ et γ_2 deux chemins de x à y . Si $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une bijection continue telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$, alors $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$.

Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins, le premier de x à y , et le second de y à z , on appelle *concaténation* des chemins γ_1 et γ_2 l'application $\gamma_1\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \text{ est dans } [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } t \text{ est dans } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemme 1.24 $\gamma_1\gamma_2$ est un chemin (continu) de x à z , et

$$\ell(\gamma_1\gamma_2) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$$

On dit que (X, d) est *connexe par arcs rectifiables* si pour tout x et y dans X , il existe un chemin γ de x à y de longueur finie.

Proposition 1.25 (« plus court chemin ») Si (X, d) est connexe par arcs rectifiables, l'application d_ℓ définie par

$$d_\ell(x, y) = \inf_{\gamma \text{ chemin de } x \text{ à } y} \ell(\gamma)$$

est une distance sur X . On l'appelle distance de longueur associée à d . Elle vérifie

$$d \leq d_\ell \quad \text{et} \quad (d_\ell)_\ell = d$$

Un espace métrique (X, d) est *géodésique* si pour tout x et y de X il existe un chemin de x à y de longueur égale à $d(x, y)$, ou de manière équivalente si $d = d_\ell$ et si l'inf est atteint. Par exemple, tout espace vectoriel normé et plus généralement toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est un espace géodésique : le *segment de droite* reliant deux points est un plus court chemin entre ces points.

1.4 Obtention de distances

Proposition 1.26 (distance bornée) Si d est une distance sur X , alors $\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ définit aussi une distance sur X et $\delta \leq 1$.

Proposition-définition 1.27 (distance induite) Soit (X, d) un espace métrique, Y un sous-ensemble de X . La restriction de d à Y définit une distance sur Y , appelée *distance induite sur Y par d* , et notée d_Y (ou souvent abusivement d).

$$\begin{aligned} d_Y : Y \times Y &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) \end{aligned}$$

Proposition-définition 1.28 (distance produit) Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques, et soit X le produit cartésien $X_1 \times \dots \times X_n$. L'application δ_∞ définie ci-dessous est une distance sur X . Ainsi, (X, δ_∞) est un espace métrique.

$$\begin{aligned} \delta_\infty : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(x_i, y_i)\} \end{aligned}$$

Remarque. On peut définir sur X deux autres distances δ_1 et δ_2 équivalentes à δ_∞ en posant pour x et y dans X

$$\delta_1(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \delta_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Plus généralement, on définit $\delta_p(x, y)$ pour tout entier $p \geq 1$ en posant :

$$\delta_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

Exercice. Montrer que les distances δ_1 , δ_2 et δ_∞ sont équivalentes sur $X_1 \times \dots \times X_n$.

1.5 Notions métriques

Pour la suite, (X, d) désigne un espace métrique.

1.5.1 Boules

Définition 1.29 (boules, sphère) Soit a un élément de X , et $r > 0$. On appelle

1. *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$,
2. *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble $B'(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$,
3. *sphère de centre a et de rayon r* l'ensemble $S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$.

Définition 1.30 (partie bornée, diamètre) Soit A une partie non vide de X . Si l'ensemble $\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$ est une partie majorée de \mathbb{R} , on dit que A est *bornée*. On définit alors le *diamètre* $\delta(A)$ de A en posant

$$\delta(A) = \sup \{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$$

Proposition 1.31 Une boule (ouverte ou fermée) de rayon r d'un espace métrique est bornée et son diamètre δ vérifie $\delta \leq 2r$.

Remarque. Dans le cas d'un espace vectoriel normé, δ est égal à $2r$. C'est faux pour un espace métrique : dans l'exemple 1.9 d'un ensemble quelconque X muni de la distance discrète, pour tout x dans X , la boule fermée $B'(x, 1)$ est de rayon 1, et de diamètre 1.

Définition 1.32 (segment, partie convexe d'un \mathbb{R} -evn) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Soient x et y deux éléments E .

1. On appelle *segment* $[x, y]$ l'ensemble $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$.
2. Une partie A de E *convexe* si $[x, y] \subset A$ pour tout x et y de A .

Proposition 1.33 Une boule (ouverte ou fermée) d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé est convexe.

1.5.2 Distance entre deux parties

Définition 1.34 (distance à une partie) Soit A une partie de X non vide et x un élément de X . On appelle *distance de A à x* le réel noté $d(A, x)$ défini par :

$$d(A, x) = \inf_{a \in A} \{d(a, x)\}$$

Remarques.

1. C'est une borne inférieure, qui n'est donc pas toujours atteinte ! Notamment, $d(A, x) = 0$ n'entraîne pas forcément $x \in A$.
2. On a $d(\{a\}, x) = d(a, x)$.

Proposition 1.35 Soit A une partie non vide de X . L'application de X dans \mathbb{R}^+ qui à x associe $d(A, x)$ est 1-lipshitzienne (donc continue...). Cela veut dire que pour tout x, y de X , elle vérifie

$$|d(A, x) - d(A, y)| \leq d(x, y)$$

Définition 1.36 (distance entre deux parties) Soient A et B deux parties de X non vides. On appelle *distance de A à B* le réel $d(A, B)$ défini par

$$d(A, B) = \inf_{\substack{b \in B \\ a \in A}} \{d(a, b)\}$$

Remarques.

1. C'est cohérent avec les définitions précédentes : on a $d(A, \{x\}) = d(A, x)$.
2. Là encore, $d(A, B)$ n'est pas forcément atteinte. En particulier, $d(A, B) = 0$ n'implique pas $A \cap B \neq \emptyset$.

1.6 Notions topologiques

Pour la suite, (X, d) désigne un espace métrique.

1.6.1 Voisinage d'un point

Définition 1.37 (voisinage) Soit a un élément de X . On appelle *voisinage de a dans X* toute partie de X contenant une boule ouverte de centre a .

Notation. $\mathcal{V}(a)$ désignera l'ensemble des voisinages de a dans X .

- Propriétés 1.38**
1. Toute partie de X contenant un voisinage de a est un voisinage de a .
 2. Toute réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a .
 3. Une intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a .

Remarque. L'intersection $\bigcap_{n \geq 1} B(a, \frac{1}{n})$ est égale à $\{a\}$.

1.6.2 Ouverts, fermés

Définition 1.39 (ouvert) Soit O une partie de X . On dit que O est un *ouvert de X* si O est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si

$$(\forall x \in O)(\exists r_x > 0) B(x, r_x) \subset O$$

Définition 1.40 (fermé) Soit F une partie de X . On dit que F est un *fermé de X* si son complémentaire $X \setminus F$ dans X est un ouvert de X , c'est-à-dire si

$$(\forall x \notin F)(\exists r_x > 0) B(x, r_x) \cap F = \emptyset$$

Exemple 1.41 X et \emptyset sont des ouverts et des fermés de X .

- Proposition 1.42**
1. Toute boule ouverte est un ouvert de X .
 2. Toute boule fermée est un fermé de X . (un singleton est un fermé de X)
 3. Toute sphère est un fermé de X .

Propriétés 1.43 (stabilité)

1. La réunion quelconque d'une famille d'ouverts de X est un ouvert de X .
2. L'intersection finie d'une famille d'ouverts de X est un ouvert de X .
3. La réunion finie d'une famille de fermés de X est un fermé de X .
4. L'intersection quelconque d'une famille de fermés de X est un fermé de X .

Exemples (d'ouverts, de fermés).

1. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, les intervalles $] - \infty, a[$, $]a, b[$, $]b, +\infty[$ sont ouverts. Les intervalles $] - \infty, a]$, $[a, b]$, $[b, +\infty[$ sont fermés. L'intervalle $]1, 2]$ n'est ni ouvert, ni fermé.
2. Dans un ensemble X muni de la distance discrète, les singletons sont ouverts : ce sont des boules ouvertes de rayon $1/2$, par exemple. On en déduit que toutes les parties de X sont ouvertes, et que toutes les parties de X sont fermées.
3. Dans \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne d_2 , le premier quadrant C défini par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$$

est ouvert un ouvert de \mathbb{R}^2 . En effet, si (x, y) est dans C , la boule de centre (x, y) et de rayon $\min\{x, y\}$ est dans C .

1.6.3 Intérieur, adhérence

Définition 1.44 (intérieur) Soit A une partie de X . La réunion des ouverts de X inclus dans A est un ouvert de X inclus dans A . C'est le plus « gros » ouvert de X inclus dans A . On l'appelle *intérieur* de A .

Notation. On note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A . On a $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Proposition-définition 1.45 Un point a est dit *intérieur* à A si $a \in \overset{\circ}{A}$, c'est-à-dire si

$$(\exists r > 0) B(a, r) \subset A$$

Remarque. A est un ouvert de X si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$

Définition 1.46 (adhérence) Soit A une partie de X . L'intersection des fermés de X qui contiennent A est un fermé de X qui contient A . C'est le plus « petit » fermé de X qui contient A . On l'appelle *adhérence* de A .

Notation. On note \bar{A} l'adhérence de A . On a $A \subset \bar{A}$.

Proposition-définition 1.47 Un point a est dit *adhérent* à A si $a \in \bar{A}$ c'est-à-dire si toute boule ouverte de centre a rencontre A .

Remarque. A est un fermé de X si et seulement si $A = \bar{A}$.

Exemple 1.48 Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, donner l'intérieur et l'adhérence de $]a, b[$, $[a, b]$, \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Propriétés 1.49 (stabilité) A et B sont deux parties d'un espace métrique (X, d) .

1. Si $A \subset B$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
2. $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
3. $\frac{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}{A \cap B} \subset \frac{\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}}{\bar{A} \cap \bar{B}}$
4. $E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$
5. $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$

Remarque. L'inclusion $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$ est fautive. Dans \mathbb{R} , prenons $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On a $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, mais $\overline{A \cap B} = \mathbb{R}$. De même pour l'intérieur d'une réunion.

Proposition 1.50 (Intérieur et adhérence des boules dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé)

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Soient a dans E , et $r > 0$ un réel. Alors

1. $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$
2. $B'(\overset{\circ}{B(a, r)}) = B(a, r)$

Remarque. C'est faux pour un espace métrique. Prenons un ensemble X non vide muni de la distance discrète. Une boule fermée de rayon 1 est de diamètre 1.

Proposition-définition 1.51 (frontière) On appelle *frontière* de A notée $Fr(A)$ le fermé $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Un *point frontière* de A est un point de $Fr(A)$.

Exemple 1.52 Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, déterminer la frontière de \mathbb{Q} , de $]a, b[$ etc.

1.6.4 Partie dense

Définition 1.53 (partie dense) Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On dit que A est *dense* dans X si \bar{A} est égal à X c'est-à-dire si A rencontre tout ouvert non vide de X .

Exemples.

1. $]0, 1[$ est dense dans $[0, 1]$, avec la distance usuelle.
2. \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} , avec la distance usuelle.
3. Soit un entier n . On considère l'espace métrique \mathbb{R}^n , avec la distance infinie d_∞ (ou toute distance équivalente : d_1, d_2 , etc.) Alors \mathbb{Q}^n est dense dans \mathbb{R}^n .
4. Dans $\mathbb{R}[X]$, avec la distance infinie d_∞ , $\mathbb{Q}[X]$ est une partie dense.
5. Dans l'espace métrique $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$, on considère le sous-ensemble P des fonctions polynomiales à coefficients réels. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction f de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite p_n de fonctions polynomiales de P . On a donc $d_\infty(f, p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Toute boule ouverte de centre f rencontre donc P : P est dense dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

CHAPITRE 2

ESPACES TOPOLOGIQUES

2.1 Définitions

Définition 2.1 (topologie d'un espace métrique) Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *topologie de X* l'ensemble des ouverts de X .

Définition 2.2 (topologie, espace topologique) X est un ensemble. On appelle topologie de X un ensemble noté \mathcal{O} de parties de X vérifiant les trois propriétés :

1. \mathcal{O} est stable par réunion quelconque,
2. \mathcal{O} est stable par intersection finie,
3. \emptyset et X appartiennent à \mathcal{O} .

On appelle le couple (X, \mathcal{O}) un *espace topologique*.

Définition 2.3 (ouvert d'un espace topologique) Soit un espace topologique (X, \mathcal{O}) . On appelle *ouvert de X* tout élément de \mathcal{O} .

Exemples.

1. Si X est un ensemble, $P(X)$ et $\{\emptyset, X\}$ sont deux topologies sur X .
2. Un espace métrique (X, d) est un espace topologique.
3. Sur l'ensemble X égal à $\{1, 2\}$, les topologies possibles sont $P(X)$, $\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, X, \{1\}\}$ et $\{\emptyset, X, \{2\}\}$.

2.2 Propriétés

Proposition 2.4 Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X . Alors ces deux distances définissent la même topologie sur X (i.e. définissent la même notion d'ouvert de X).

Proposition 2.5 (topologie produit) Soit $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques, et soit X le produit cartésien $X_1 \times \dots \times X_n$ muni de la distance infinie δ_∞ . Soit A une partie de X . L'ensemble A est un ouvert de (X, δ_∞) si et seulement si pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$ de A , et tout $1 \leq i \leq n$, il existe un ouvert O_i de (X_i, d_i) tel que $a_i \in O_i$ pour tout i , et $O_1 \times \dots \times O_n \subset A$.

2.3 Distance induite. Topologie induite.

Soit (X, d) est un espace métrique et A une partie non vide de X . On a vu que l'on peut restreindre la distance d à A . On obtient une distance induite notée d_A ce qui fait de (A, d_A) un espace métrique. On peut donc y définir les notions de *boules ouvertes de A* . On note $B_A(a, r)$ une boule ouverte de A (pour $a \in A$, et $r > 0$). On a

$$B_A(a, r) = \{x \in A : d_A(x, a) < r\} = B(a, r) \cap A$$

Remarques.

1. Ne pas confondre *boule ouverte de X incluse dans A* , et *boule ouverte de A* .
2. $B_A(a, r)$ est bornée, et son diamètre n'est pas forcément égal à celui de $B(a, r)$.

(A, d_A) étant un espace métrique, possède une topologie \mathcal{O}_A appelée *topologie induite sur A* , c'est-à-dire une notion d'*ouvert de A* , puis de *fermé de A* , de *voisinage dans A* . La proposition suivante précise le lien entre la topologie induite \mathcal{O}_A et la topologie \mathcal{O} de X .

Proposition 2.6 (topologie induite)

1. Les ouverts de A sont les ensembles de la forme $O \cap A$, où O est un ouvert de X .
2. Les fermés de A sont les ensembles de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de X .
3. Les voisinages de a dans A sont les ensembles de la forme $V \cap A$, où V est un voisinage de a dans X .

Remarque. Être prudent, précis, lorsque l'on manipule ces notions.

Exemples. Dans \mathbb{R} , avec $A =]0, 1] \cup \{2\}$ et la distance usuelle.

1. A est un ouvert de A .
2. $\{2\}$ est un ouvert de A , et aussi un fermé de A . On a $\{2\} = A \cap B(2, 1/2)$.
3. $]0, 1]$ est un ouvert de A , et aussi un fermé de A .

CHAPITRE 3

SUITES

3.1 Suite convergente. Limite

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 (suite) Soit X un ensemble. On appelle *suite d'éléments de X* toute application u de \mathbb{N} dans X .

Notation. On note souvent $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite u , et $X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de X .

Définition 3.2 (suite convergente) Soit (X, d) un espace métrique, et ℓ dans X . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de $X^{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \text{ si } n \geq n_0(\epsilon), \text{ alors } d(u_n, \ell) \leq \epsilon$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, \ell) = 0$$

Remarques.

1. On calcule tout simplement la limite de la suite de réels positifs $(d(u_n, \ell))_{n \geq 0}$.
2. Pour une suite, la notion de convergence dépend fortement de la distance choisie sur X , mais est invariante par changement de distance équivalentes : si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur X , alors la suite u_n converge vers ℓ dans (X, d_1) si et seulement si elle converge vers ℓ dans (X, d_2) .

Proposition 3.3 (limite) Si ℓ existe, ℓ est unique. On l'appelle la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Notation. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Ça n'est qu'une notation !

Exercice. Dans \mathbb{R} , étudier la convergence des suites $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = 2 + u_n$ avec la distance euclidienne d_1 , la distance discrète d_s et la distance d_{SNCF} .

3.1.2 Propriétés

Proposition 3.4 Il y a équivalence entre

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ .
2. $(\forall r > 0)(\exists n_0(r) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0(r) \implies u_n \in B(\ell, r))$
3. Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : u_n \notin B(\ell, r)\}$ est fini.

Proposition 3.5 Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_p, d_p)$ des espaces métriques. Soit $(U^n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de (X, δ_∞) où X désigne le produit $X_1 \times \dots \times X_p$. On note (u_1^n, \dots, u_p^n) les coordonnées de la suite $(U^n)_{n \geq 0}$. Alors, la suite $(U^n)_{n \geq 0}$ converge vers (ℓ_1, \dots, ℓ_p) si et seulement si pour tout i de $\{1, \dots, p\}$ la suite $(u_i^n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ_i .

3.2 Suite extraite. Valeurs d'adhérence

Définition 3.6 (suite-extraite) Soit X un ensemble, et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X . On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ toute suite $(v_n)_{n \geq 0}$ où $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout entier n , et où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Proposition-définition 3.7 Soit (X, d) un espace métrique et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X . On dit que a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ si l'une des propositions équivalences suivantes est vérifiée :

1. a est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : u_n \in B(a, r)\}$ est infini.
3. $(\forall r > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists n_0 \geq n) u_{n_0} \in B(a, r)$
4. $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$

Remarques.

1. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est donc un fermé de E .
2. Si une suite converge vers a , elle a une seule valeur d'adhérence : a . La réciproque est fautive (considérer la suite u_n définie par $u_n = 1$ pour n pair et $u_n = n$ pour n impair).

3.3 Caractérisation séquentielle des fermés

Proposition 3.8 Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de E , et a dans X . L'élément a est dans l'adhérence de A si et seulement si a est limite d'une suite de points de A .

Proposition 3.9 A est un fermé de X si et seulement si toute suite d'éléments de A convergente (dans X) a sa limite dans A .

Exercice (Caractérisation de la borne supérieure). Si A partie de \mathbb{R} non vide majorée, montrer :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ M \in \overline{A} \text{ (ie } M = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ avec } a_n \in A) \end{cases}$$

3.4 Suites de Cauchy. Parties complètes d'un espace métrique

3.4.1 Suites de Cauchy

Définition 3.10 (suite de Cauchy) Soit (X, d) un espace métrique, $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $X^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans (X, d) si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2) n \geq n_0(\epsilon) \text{ et } p \geq n_0(\epsilon) \implies d(u_n, u_p) \leq \epsilon$$

Proposition 3.11

1. Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X , et u une suite d'éléments de X . Alors u est de Cauchy dans (X, d_1) si et seulement si elle est de Cauchy dans (X, d_2) .
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Une suite convergente est de Cauchy.
4. Une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence est convergente.

3.4.2 Parties complètes.

Définition 3.12 (espace métrique complet) Soit (X, d) un espace métrique. (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente (dans X).

L'exemple de référence d'espace métrique complet est \mathbb{R} , muni de la distance usuelle. L'intérêt des espaces complets vient du fait qu'ils sont relativement nombreux, et qu'ils permettent d'étudier la convergence des suites sans connaître précisément leurs limites. Par exemple, en sachant que \mathbb{R} est complet, il est facile de montrer que la suite $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ est convergente, tandis qu'il n'est pas facile de calculer que sa limite, qui vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Définition 3.13 (partie complète) Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X . On dit que A est une partie complète de X si A muni de la distance induite d_A est complet, i.e. si toute suite de Cauchy de points de A est convergente dans A .

Exemples.

1. Avec la distance usuelle, $[0, 1]$ est une partie complète de \mathbb{R} : toute suite de Cauchy de $[0, 1]$ est aussi une suite de Cauchy de \mathbb{R} , donc a une limite. Comme $[0, 1]$ est fermé, cette limite est dans $[0, 1]$.
2. $]0, 1[$ n'est pas une partie complète de \mathbb{R} . La suite $1/n$ est de Cauchy dans $]0, 1[$, mais ne converge pas dans $]0, 1[$.

Propriétés 3.14 1. Une partie complète d'un espace métrique (X, d) est un fermé de X .

2. Soit (X, d) un espace métrique complet, et A une partie de X . A est complète si et seulement si A est un fermé de X .
3. Soient d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X . Alors (X, d_1) est complet si et seulement si (X, d_2) l'est.

Proposition 3.15 (produit cartésien d'espaces métriques) Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_p, d_p)$ des espaces métriques complets. Alors $X_1 \times \dots \times X_p$ muni de la distance infinie ν_∞ (ou ν_1 , ou ν_2) est complet.

3.5 Exemples d'espaces complets

Exemple 3.16 (Exemple fondamental 1) Muni de la distance usuelle, \mathbb{R} est complet.

Exemple 3.17 Pour tout entier n , (\mathbb{R}^n, d_∞) , (\mathbb{R}^n, d_1) et (\mathbb{R}^n, d_2) sont complets : c'est un corollaire immédiat de la Proposition 3.15. En particulier, pour n égal à 2, on obtient que \mathbb{C} est complet, avec la distance issue du module.

Exemple 3.18 (Exemple fondamental 2) Soit A un ensemble quelconque non vide (en pratique \mathbb{R} ou \mathbb{N}) et (X, d) un espace métrique. Si f est une fonction de A dans X , on dit que f est *bornée sur A* si son image $f(A)$ est une partie bornée de X . On considère une $\mathcal{B}(A, X)$ l'ensemble des fonctions de A dans X qui sont bornées sur A . Pour f et g dans $\mathcal{B}(A, X)$, on définit

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in A} \{d(f(x), g(x))\}.$$

C'est une distance sur $\mathcal{B}(A, X)$.

Définition 3.19 (convergence uniforme d'une suite de fonctions) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A, X)$ et f dans $\mathcal{B}(A, X)$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f uniformément sur A si la suite f_n converge vers f dans $(\mathcal{B}(A, X), d_\infty)$, c'est-à-dire si

$$d_\infty(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Théorème 3.20 Si (X, d) est complet, alors $(\mathcal{B}(A, X), d_\infty)$ est complet.

Exemple 3.21 Dans l'exemple précédent, si $A = \mathbb{N}$ et $X = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, alors $\mathcal{B}(A, X) = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. L'espace métrique $(\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}), d_\infty)$ est complet. Dans ce cas, on a

$$d_\infty(u, v) = \sup_{n \geq 0} |u_n - v_n|.$$

Exemple 3.22 Dans l'exemple 3.18, si $A = [0, 1]$, et $X = \mathbb{R}$, alors $\mathcal{B}(A, X)$ est l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui sont bornées. Puisqu'une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ est bornée, $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}(A, X)$. Rappelons que la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ qui converge uniformément sur $[0, 1]$ est continue. On en déduit que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$. L'espace métrique $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ est donc complet.

Exercices. Montrer qu'un ensemble muni de la distance discrète est complet. Montrer que \mathbb{R} avec la distance d suivante n'est pas complet :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{(1 + x^2)^{1/2}(1 + y^2)^{1/2}}.$$

Montrer que $] - 1, 1[$ avec la distance δ suivante est complet :

$$\delta(x, y) = \left| \tan \frac{x\pi}{2} - \tan \frac{y\pi}{2} \right|.$$

3.6 Complété d'un espace métrique

Les nombres rationnels forment un espace métrique avec la distance euclidienne. Il n'est pas complet puisque $\sqrt{2}$ est limite d'une suite (de Cauchy) de rationnels, mais c'est un sous-espace de \mathbb{R} , qui lui, est complet. Plus généralement, nous allons voir qu'un espace métrique peut toujours être complété, au sens suivant :

Définition 3.23 (complétion) Soient (X, d) et (X^*, d^*) deux espaces métriques. On dit que (X^*, d^*) est une *complétion* de (X, d) si

1. (X, d) est un sous espace de (X^*, d^*) (*i.e.* $X \subset X^*$ et d est la distance induite par d^* sur X),
2. tout point de X^* est limite d'une suite de point de X (*i.e.* X est dense dans X^*),
3. (X^*, d^*) est complet.

Exemples.

1. $[0, 1]$ est une complétion de $]0, 1[$, avec la distance usuelle.
2. Muni de la distance usuelle, \mathbb{R} est une complétion de \mathbb{Q} puisque \mathbb{R} est complet et que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
3. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes. D'autre part, $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ est complet d'après le paragraphe précédent. Donc $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ est une complétion du sous-espace des fonctions polynômiales.

Théorème 3.24 Soit (X, d) un espace métrique. X possède une complétion X^* , et deux complétions de X sont isométriques. On appelle X^* le complété de X .

CHAPITRE 4

APPLICATIONS CONTINUES

4.1 Limite d'une application

Définition 4.1 (limite d'une application) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, A est une partie non vide de X , a un élément de \bar{A} , b de Y et f une application de A dans Y . On dit que f tend vers b quand x tend vers a suivant A si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon) > 0)(\forall x \in A \cap B(a, \alpha)) f(x) \in B(b, \epsilon)$$

ou encore si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon) > 0)(\forall x \in A) \text{ si } d(x, a) \leq \alpha, \text{ alors } \delta(f(x), b) \leq \epsilon.$$

On note alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Remarques.

1. f n'est pas forcément définie au point a .
2. La notion stable par changement de distances équivalentes dans X ou Y .

Proposition 4.2 Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Proposition 4.3 (caractérisation séquentielle) f est une application de A dans Y , a est dans \bar{A} et b dans Y . Alors f tend vers b en a suivant A si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de points de A qui converge vers a , la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ converge vers b .

Proposition 4.4 1. (produit) Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_d, d_p)$ et (Y, δ) des espaces métriques. Si $X = X_1 \times \dots \times X_p$ est muni de la distance infinie ν_∞ , si (b_1, \dots, b_p) est dans X et si f associe à tout x de X l'élément $(f_1(x), \dots, f_p(x))$ de Y , alors

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = (b_1, \dots, b_n) \text{ si et seulement si } \forall i \in \{1, \dots, p\} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f_i(x) = b_i$$

2. (composition) Soient (X, d_1) , (X_2, d_2) et (X_3, d_3) trois espaces métriques, A une partie non vide de X_1 , a dans \bar{A} , B une partie non vide de X_2 , b dans \bar{B} , c dans X_3 , f une application de A dans X_2 et g une application de B dans X_3 avec $f(A) \subset B$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b \text{ et } \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in B}} g(y) = c, \text{ alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g \circ f(x) = c.$$

4.2 Continuité

(X, d) et (Y, δ) désignent deux espaces métriques et A une partie non vide de X .

Définition 4.5 (continuité « locale ») Soient a un élément de A , f une application de A dans Y . On dit que f est continue au point ssi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$$

ie si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon))(\forall x \in A) \text{ si } d(x, a) \leq \alpha(\epsilon) \text{ alors } \delta(f(x), f(a)) \leq \epsilon$$

Remarques. 1. Notion stable par changement de distances équivalentes (sur X ou Y).

2. Si $a \in \bar{A} \setminus A$ et si f tend vers b en a suivant A , on peut prolonger f par continuité à $A \cup \{a\}$ en posant $f(a)$ égal à b .

Définition 4.6 (continuité « globale ») Une application f de A dans Y est *continue sur A* si f est continue en tout point de A .

Propriétés 4.7 (stabilité) 1. (*restriction*) si f est continue sur A , f est continue sur tout $B \subset A$.

2. (*composition*) soit (Z, ν) un espace métrique, B une partie non vide de Y , f de A dans Y continue sur A et g de B dans Z continue sur B avec $f(A) \subset B$. Alors $g \circ f$ est continue sur A .

3. (*fonctions à valeurs dans un espace produit*) si $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_p$ est muni de la distance infinie, et f est une fonction de A dans Y qui à x associe $(f_1(x), \dots, f_p(x))$. Alors f est continue sur A si et seulement si chaque f_i est continue sur A .

Exemple 4.8 A x on associe une matrice carrée de taille 2 en x .

4.3 Caractérisation séquentielle de la continuité

Théorème 4.9 Soit f une application de A dans Y . Alors f est continue sur A si et seulement si pour tout a dans A et toute suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a , la suite $(f(a_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Proposition 4.10 (cas des fonctions à valeurs réelles) Soit (X, d) un espace métrique, f et g deux fonctions continues de X dans \mathbb{R} , et λ un réel. Alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues (i.e. $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre). De plus, $1/f$ est continue sur son domaine de définition.

Exemple 4.11 Toute fonction polynômiale de $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_{\infty})$ dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ est continue sur \mathbb{R}^n .

4.4 Caractérisation topologique de la continuité

Théorème 4.12 Soit f de A dans Y . Il y a équivalence entre :

1. f est continue sur A .
2. L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de A .
3. L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de A .

Remarque. Le théorème 4.12 est un bon moyen pour montrer qu'une partie A d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E est un ouvert (ou un fermé) de E , l'idée étant de trouver une équation ou inéquation (ou un système) caractérisant A .

Exemples. Soit f de (X, d) dans \mathbb{R} continue sur X .

1. L'ensemble $\{x \in X : f(x) = 0\}$ est un fermé de X . C'est le cas du graphe de l'hyperbole défini par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$.
2. L'ensemble $\{x \in X : f(x) > 0\}$ est un ouvert de X .

CHAPITRE 5

COMPACTITÉ

5.1 Définitions, propriétés

Définition 5.1 (recouvrement, sous-recouvrement) Soit E un ensemble et A une partie de E . On appelle *recouvrement* de A toute famille $\{A_i : i \in I\}$ de parties de E telles que $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. On dit alors que $\{A_i : i \in I\}$ recouvre A . Si $\{A_i : i \in I\}$ est un recouvrement de A , un *sous-recouvrement* de $\{A_i : i \in I\}$ est une famille $\{A_i : i \in J\}$ avec $J \subset I$ qui recouvre A .

Par exemple, la famille d'intervalles $\{[-r, r] : r \in \mathbb{R}^+\}$ est un recouvrement de \mathbb{R} , et $\{[-n, n] : n \in \mathbb{N}^*\}$ en est un sous-recouvrement. La famille $\{]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[: n \geq 1\}$ est un recouvrement de l'intervalle $] - 1, 1[$.

Proposition-définition 5.2 (partie compacte) Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X . On dit que A est une *partie compacte* de X si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. (Bolzano-Weierstrass) de toute suite de points **de** A , on peut extraire une sous-suite convergente **dans** A (*i.e.* toute suite de points de A a une valeur d'adhérence **dans** A).
2. (Borel-Lebesgue) de tout recouvrement de A par des ouverts **de** A , on peut extraire un sous-recouvrement fini.
3. de toute intersection vide de fermés **de** A on peut extraire une sous-intersection vide finie.

Remarque. Notion stable par changement de normes équivalentes.

Proposition 5.3 (propriété des parties compactes) (X, d) est un espace métrique.

1. Une partie compacte de X est fermée et bornée.
2. Une partie compacte de X est complète.
3. Un fermé de X inclus dans une partie compacte de X est une partie compacte de X .

Proposition 5.4 (obtention de compacts) (X, d) est un espace métrique.

1. Une intersection quelconque de parties compactes de X est une partie compacte de X .
2. Une réunion finie de parties compactes de X est compacte.
3. Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_p, d_p)$ des espaces métriques. On muni $X = X_1 \times \dots \times X_p$ de la distance infinie d_∞ . Si A_i est une partie compacte de X_i (pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$) alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est une partie compacte de X .

Corollaire 5.5 Les parties compactes de \mathbb{R}^n (muni de d_∞ , d_1 , ou d_2) sont les fermés bornés.

Exemples. 1. Dans $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, un segment fermé $[a, b]$ est compact.

2. $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ n'est pas compact.

3. Une réunion finie de boule fermée dans (\mathbb{R}^2, d_2) est compacte.

4. Dans $(M_n(\mathbb{R}), d_\infty)$, le groupe des matrices orthonogonales $O_n(\mathbb{R})$ défini par $\{M \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = id\}$, et le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$ défini par $\{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$ sont compacts.

5.2 Compacité et continuité

Proposition 5.6 (image continue d'un compact) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, A une partie compacte de X et f une application continue de A dans Y . Alors $f(A)$ est une partie compacte de Y .*

Proposition 5.7 (Heine) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, A une partie compacte de X et f une application de A dans Y . Si f est continue sur A , elle est uniformément continue sur A .*

Cas des fonctions à valeurs réelles

Proposition 5.8 (fonction continue sur un compact) *(X, d) un espace métrique, A une partie compacte de X non vide, f une fonction de A dans \mathbb{R} continue sur A . Alors f est bornée et atteint ses bornes, ie les quantités $m = \inf_{x \in A} f(x)$ et $M = \sup_{x \in A} f(x)$ existent et il y a un couple (x_0, y_0) de A^2 tel que $m = f(x_0)$ et $M = f(y_0)$.*

Corollaire 5.9 1. *$(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ sont deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E non vide et f une application continue de A dans F . Alors $\inf_{x \in A} \|f(x)\|_F$ et $M = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_F$ existent et sont atteints.*

2. *a et b deux réels. Soit E l'espace $\mathcal{C}([a, b], F)$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans F . $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_F$ définit bien une norme sur E .*

3. *Si A est une partie compacte de E , $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(A, F)$.*

Remarque. De nombreux problèmes d'existence (analyse, géométrie) peuvent se résoudre en étant interprétés en terme de min ou max d'une fonction continue sur un compact.