Cédric Milliet

Cours d'

ANALYSE COMPLEXE

Version préliminaire

Cours de troisième année de *Lisans*
Université Galatasaray, 2011

Cédric Milliet
Université Galatasaray
Faculté de Sciences et de Lettres
Département de Mathématiques
Çirağan Caddesi n°36
34357 Ortaköy, İstanbul, Turquie
Mél : `milliet@math.univ-lyon1.fr`
Site internet : `http://math.gsu.edu.tr/milliet`

Ce cours doit beaucoup au chapitre X intitulé séries entières du cours de mathématiques spéciales de Marc Audran, ainsi qu'au cours d'analyse complexe de Michèle Audin, lequel est disponible à l'adresse `www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/analysecomp.pdf`.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

L'analyse réelle, c'est à l'originie l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et surtout des fonctions régulières : continues, dérivables, intégrables, de classe C^1, C^∞ etc. En *analyse complexe*, nous allons étudier les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, continues, mais surtout dérivables. Pour une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on emploie le terme *holomorphe* plutôt que dérivable. Les premiers exemples de fonctions de la variable complexe sont bien sûr les fonctions polynômiales à coefficients complexes, et plus généralement les sommes de séries entières convergentes à coefficients complexes. Réciproquement, nous verons qu'une fonction f est holomorphe en un point z_0 de U si et seulement si f est la somme d'une série entière convergente sur un voisiange de ce point, c'est-à-dire :

> *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$, alors, la limite $\displaystyle\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in U}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$ si et seulement s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n \geq 0}$ et un voisinage V de z_0 sur lequel l'égalité $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ est vérifiée.*

Une conséquence immédiate, c'est qu'une fonction holomorphe en un point z_0, *ie* dérivable une fois au sens complexe au point z_0, est infiniment dérivable en ce point. Nous aborderons ensuite le problème de l'existence d'une primitive d'une fonction holomorphe. Ces théorèmes font intervenir des notions topologiques, et des résultats sur les séries numériques et séries de fonctions. Commençons donc par des rappels de topologie et d'analyse.

RAPPELS DE TOPOLOGIE ET D'ANALYSE

1. Topologie générale sur $\mathbb{C}$

- Muni de l'application module $z \mapsto |z|$, le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel normé** de dimension deux. Le module d'un nombre complexe $a + ib$ est défini par $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Sur $\mathbb{C}$, toutes les **normes sont équivalentes**. Elles définissent donc toutes la même topologie que le module, et la même notion de convergence pour les suites.
- $\mathbb{C}$ est **complet** : toute suite de Cauchy à valeurs complexes converge dans $\mathbb{C}$.
- **La boule ouverte** de centre z_0 et de rayon r :

$$B(z_0, r) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \Big\}$$

  Dans le plan, une boule a la forme d'un disque. On emploi donc souvent le terme *disque ouvert de centre z_0 et de rayon r* lorsque l'on fait de la topologie dans $\mathbb{C}$, et on note $D(z_0, r)$ au lieu de $B(z_0, r)$.
- **La boule fermée** (ou le disque fermé) de centre z_0 et de rayon r :

$$\bar{B}(z_0, r) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \Big\}$$

- **Un ouvert** de $\mathbb{C}$ est une réunion de boules ouvertes de $\mathbb{C}$. Par exemple :
  - le premier quadrant $\Big\{ z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 0 \ et \ Im(z) > 0 \Big\}$
  - la couronne $\Big\{ z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2 \Big\}$.
- **Un fermé** de $\mathbb{C}$ est le complémentaire d'un ouvert de $\mathbb{C}$.
- **Adhérence et intérieur** d'une partie A de $\mathbb{C}$:
  - $\bar{A}$ est l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{C}$ contenant A.
  - $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{C}$ inclus dans A.
- Une partie **compacte** de $\mathbb{C}$ est une partie à la fois fermée bornée de $\mathbb{C}$.

2. Séries à valeurs dans $\mathbb{C}$

– La **série de terme général** $(u_n)_{n\geq 0}$: c'est la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. La série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite (attention : ça n'est qu'une notation !).

– La série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ est **absolument convergente** si la série de terme général $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est convergente.

Théorème 0.1 (échange $\sum \sum$) *Soit $(u_{p,q})_{p\geq 0, q\geq 0}$ une famille de complexes indicée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si*

1. *Pour tout entier p, la série de terme général $(u_{p,q})_{q\geq 0}$ est absolument convergente, et*
2. *la série de terme général $(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|)_{p\geq 0}$ est absolument convergente,*

Alors les séries de terme $(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})_{p\geq 0}$, $(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})_{q\geq 0}$, et $(\sum_{p+q=n} u_{p,q})_{n\geq 0}$ sont absolument convergentes et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p+q=n} u_{p,q})$$

Corollaire 0.2 *Soient deux séries à termes complexes de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ et absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ est absolument convergente* *et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q)$$

3. Séries de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, S une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et A une partie de $\mathbb{C}$. On appelle **série de fonctions** $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

Définition 0.3 (convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions sur A)
On dit que la série de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge vers** S

– **simplement sur** A si $(\forall z \in A)$ $|S_n(z) - S(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
– **uniformément sur** A si $\sup_{z\in A} |S_n(z) - S(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
– **normalement sur** A si $\sup_{z\in A} |f_n(z)|$ est le terme général d'une série convergente.

Remarque. La convergence normale sur A implique la convergence uniforme sur A, qui elle même implique la convergence simple sur A.

Théorème 0.4 (échange $\lim \sum$) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, A une partie de $\mathbb{C}$ et a un point adhérent à A. Si*

1. *la série $(f_n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur A, et*
2. *pour tout entier n, la limite $\lim_{z\to a} f_n(z)$ existe et vaut ℓ_n,*

alors la série l_n est convergente et

$$\lim_{z\to a}(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lim_{z\to a} f_n(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Pour les séries de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Théorème 0.5 (échange $\int_a^b \sum$) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, et qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

CHAPITRE 1

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

1.1 Rappels sur les séries entières

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 (série entière) On appelle **série entière** $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la série de fonction $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ où $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de complexes.

Définition 1.2 (rayon de convergence) On appelle **rayon de convergence** de la série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la quantité

$$\rho = \sup\{r \in [0, +\infty[\ : \ \text{la série entière } (|a_n| r^n)_{n\geq 0} \text{ converge}\}$$

Remarque. ρ est le sup d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, réel si cette partie est majorée, égal à $+\infty$ sinon.

1.1.2 Propriétés

Lemme 1.3 (lemme d'Abel) *Soient deux réels $r_0 > 0$ et $M > 0$ tels que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad |a_n| r_0^n \leq M$$

Alors, pour tout $r < r_0$, la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur $\overline{B}(0, r)$.

Proposition 1.4 *Soit une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence ρ.*

1. *pour tout $r < \rho$, la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur le disque $\overline{B}(0, r)$.*
2. *la série $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ diverge pour tout $z \notin \overline{B}(0, \rho)$.*

Remarque. 1. Attention au bord...

2. Si $|a_{n+1}/a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, le rayon de convergence de $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est $1/\ell$.
3. Soient deux séries $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence ρ_1 et ρ_2. Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $\rho_2 \leq \rho_1$.

Proposition 1.5 (somme et produit de séries entières) *Soient $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2. Soit $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$. Alors les séries entières $(s_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(p_n z^n)_{n\geq 0}$ ont un rayon de convergence au moins égal à $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ et pour tout $|z| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$$

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

1.2 Fonctions analytiques

1.2.1 Définitions

Définition 1.6 (fonction analytique) Soit z_0 dans $\mathbb{C}$. Soit U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est **analytique en** z_0 si f est développable en série entière au voisiange de

z_0, i.e. s'il existe un $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ telle que

$$(\forall z \in \overline{B}(z_0, r)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit que f est **analytique sur** U si elle est analytique en tout point de U.

Exemple 1.7

1. un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est analytique en 0, et même en tout point z_0 de $\mathbb{C}$: d'après la formule de Taylor,
$$\text{si } P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ alors } P(z) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$
2. e^z est analytique en 0. La somme d'une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ est analytique en 0. Nous verrons qu'elle est analytique sur l'intérieur de son disque de convergence.

Proposition 1.8 *L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur $\mathbb{C}$.*

Notation. On la note $\mathcal{O}(U)$.

1.2.2 Propriétés

Proposition 1.9 (principe des zéros isolés, version série entière) *Soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme $f(z)$. Si au moins un des coefficients a_n est nul, il existe un $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $B(0, r) \setminus \{0\}$.*

Corollaire 1.10 *Une fonction analytique sur un ouvert U a un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.*

Rappels de topologie

Proposition-définition 1.11 (connexe) Soit un espace topologique X. On dit que X est **connexe** si de manière équivalente

1. X n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.
2. X n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints.
3. les seules parties à la fois fermées et ouvertes de X sont $\emptyset$ et X.

Exemples.

1. dans $\mathbb{R}$, les parties connexes sont les intervalles. Une réunion de deux intervalles disjoints n'est pas connexe.
2. dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une partie convexe est connexe.
3. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe.
4. une boule d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe.

Remarque. être connexe, c'est être "en un seul morceau".

Définition 1.12 (point d'accumulation) Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et a un nombre complexe. On dit que a est un **point d'accumulation de** A si le singleton $\{a\}$ n'est pas un ouvert de $A \cup \{a\}$ (pour la topologie induite).

Exemple 1.13 0 est un point d'accumultaion de l'ensemble $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposition 1.14 (principe du prolongement analytique) *U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions analytiques sur U, A une partie de U et a un nombre complexe dans U. Si a est un point d'accumulation de A et si f et g coïncident sur A, alors elles coïncident sur U.*

Remarque. En particulier, si f est analytique et nulle sur un segment (ou une courbe, ou un ouvert) non vide de U, alors f s'annule sur U tout entier.

Remarque. Si $V \subset U$ sont deux ouverts non vides avec U connexe et si f est analytique sur V, on appelle **prolongement analytique de** f **à** U toute fonction analytique sur U qui coïncide avec f sur V. Un tel prolongement est unique s'il existe.

Proposition 1.15 (principe des zéros isolés) *f est une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas la fonction nulle, et si $f(z_0) = 0$, alors il existe un $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$*

1.3 Analycité des séries entières

Proposition-définition 1.16 (série dérivée) Soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de somme $f(z)$ et de rayon de convergence $\rho > 0$. On appelle **série dérivée** de $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ la série entière $(na_n z^{n-1})_{n\geq 1}$, et **dérivée de** f la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$. Son rayon de convergence est ρ aussi.

Corollaire 1.17 *Une fonction analytique sur U y admet des dérivées de tout ordre.*

Remarque. On note $f'(z)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$.

Proposition 1.18 *f est la somme d'une série entière de rayon de convergence ρ. Pour tout z dans $B(0,\rho)$, on a*

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Théorème 1.19 (analycité des séries entières) *La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence. Plus précisément, siot $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence ρ et de somme $f(z)$. Soit z_0 dans $B(z_0,\rho)$. Alors*

$$\forall z \in B(z_0, \rho - |z_0|) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Remarque. En particulier, la série $(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z)^n)_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |z_0|$.

1.4 Exponentielle, logarithme

1.4.1 Définition, propriétés de l'exponentielle

Définition 1.20 (exponentielle) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Propriétés 1.21
1. *la fonction $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$ et y admet des dérivées de tout ordre.*
2. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
3. $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
4. $(\forall y \in \mathbb{R}) \quad |e^{iy}| = 1$

Remarque. On peut ainsi, indépendament du logarithme définir la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^x. Elle est continue et même C^∞ sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et vérifie $e^x e^{-x} = 1$. De plus, pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $e^x \geq x^n/n!$ donc $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{-\infty} e^x = 0$. Enfin, $e^x > 0$ pour tout x réel donc $x \mapsto e^x$ réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On appelle ln sa bijection réciproque.

1.4.2 Fonctions circulaires de la variable réelle

Définition 1.22 (cosinus et sinus) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\cos x = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque. Comme $(\forall x \in \mathbb{R})\ |e^{ix}| = 1$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Propriétés 1.23
1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus,* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.
2. *On retrouve les formules trigonométriques usuelles grâce à $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$*

   Reste à étudier la périodicité de ces fonctions.

Lemme 1.24 *La fonction* cos *s'annule sur $\mathbb{R}^+$.*

Définition 1.25 (pi) On appelle π le nombre $2\inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Proposition 1.26 cos *et* sin *sont périodiques de période 2π.*

1.4.3 Etude de $z \mapsto e^z$

Propriétés 1.27
1. $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z = e^{z+2i\pi}$
2. *$z \mapsto e^z$ a pour image $\mathbb{C}^*$.*
3. *Plus précisément, les solutions de $e^z = a = re^{i\theta}$ sont $\ln r + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z})$.*
4. *L'application $x \mapsto e^{ix}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité.*

1.4.4 Logarithme népérien

Définition 1.28 On appelle **logarithme népérien**, noté ln, la fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ réciproque de l'exponentielle.

Proposition 1.29 *ln est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $x \mapsto 1/x$.*

1.4.5 Logarithme complexe

Définition 1.30 (détermination du logarithme sur un ouvert U) U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. On appelle **détermination du logarithme sur** U toute fonction f **continue** de U dans $\mathbb{C}$ vérifiant $e^{f(z)} = z$ pour tout z de U.

Remarque. $z \mapsto e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ mais non injective.

Propriétés 1.31
1. *Il n'y a pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*
2. *Si f et g sont deux détermination du logaritme sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^*$, il existe un k dans $\mathbb{Z}$ tel que $f = g + 2ik\pi$.*

Proposition 1.32 (détermination du logarithme sur $B(1,1)$) *La série entière $((-1)^{n-1}z^n/n)_{n\geq 0}$ a pour rayon de convergence 1. La somme*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur le disque $B(1,1)$.

Proposition 1.33 (détermination du logarithme sur toute boule ouverte ne contenant pas 0)
Soit z_0 dans $\mathbb{C}^*$ et θ_0 un argument de z_0. La somme

$$ln|z_0| + i\theta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{z-z_0}{z_0})^n$$

est une détermination du logarithme sur le disque $B(z_0, |z_0|)$.

Proposition 1.34 (détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$)
La fonction f définie par

$$f(z) = \begin{cases} ln|z| + i \arcsin(Im(z)/|z|) & si\ Re(z) \geq 0 \\ ln|z| + i(\pi - \arcsin(Im(z)/|z|)) & si\ Re(z) \leq 0\ et\ Im(z) \geq 0 \\ ln|z| - i(\pi + \arcsin(Im(z)/|z|)) & si\ Re(z) \leq 0\ et\ Im(z) \leq 0 \end{cases}$$

est une détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.35 (détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+ e^{i\theta})$)
Il existe une détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+ e^{i\theta})$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS HOLOMORPHES

2.1 Définitions, propriétés

Définition 2.1 (fonction dérivable au sens complexe) U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U. On dit que f est **dérivable en** z_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite.

Définition 2.2 (fonction holomorphe) U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f **est holomorphe sur** U si f est dérivable en tout point z de U et si la dérivée f' est continue sur U.

Remarque.

1. f est dérivable en z_0 si et seulement si
$$f(z_0+h) = f(z_0) + h.f'(z_0) + h.\alpha(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$
2. Si a est un nombre complexe, l'application $z \mapsto a.z$ est une transformation du plan appelée similitude. En écrivant a sous la forme $re^{i\theta}$, on se convainc qu'une similitude est la composé d'une rotation et d'une homothétie. En particulier, elle conserve les angles.
3. Dans la plupart des livres, on ne demande pas à une fonction holomorphe f que sa dérivée f' soit continue. Nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes.

Proposition 2.3 *U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U.*

1. $(\forall \lambda \in \mathbb{C})\ (\lambda.f)' = \lambda.f'$
2. $(f+g)' = f' + g'$
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$
4. *Si f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et $(1/f)' = -f'/f^2$.*
5. *Si h est une fonction d'un ouvert V de $\mathbb{C}$ à valeurs dans U qui soit holomorphe sur V, alors $g \circ h$ est holomorphe sur V et $(g \circ h)' = (g' \circ h).h'$.*

Corollaire 2.4 *L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est une $\mathbb{C}$-algèbre (pour $+$ et $\times$).*

Proposition 2.5 ("Les fonctions holomorphes conservent les angles") *U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur U et z_0 un point de U. On suppose que $f'(z_0) \neq 0$. Soient $\gamma_1 : [0,1] \to U$ et $\gamma_2 : [0,1] \to U$ deux courbes de classes C^1 sur $[0,1]$ se coupant en z_0 avec $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$. Si z_0 est un point régulier de γ_1 et γ_2, soient $\overrightarrow{t_1}$ et $\overrightarrow{t_2}$ les vecteurs tangents à γ_1 et γ_2 en z_0. Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ les vecteurs tangents à $f\circ\gamma_1$ et $f\circ\gamma_2$ en $f(z_0)$. Alors*
$$(\widehat{\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}})$$

2.2 Analycité des fonctions holomorphes

Remarque. Si $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme $f(z)$, on peut retrouver les coefficients a_n par la formule $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Mais on a aussi pour tout $0 < r < \rho$,
$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$$

Théorème 2.6 (Cauchy) *Soit f une fonction holomorphe sur $B(0,\rho)$.*

1. *le nombre* $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$ *ne dépend pas de* $r < \rho$.
2. *la série entière* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *a un rayon de convergence au moins égal à* ρ.
3. $(\forall z \in B(0,\rho))\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Remarque. 1. Au cours de la démonstration, on a montré la formule $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} re^{it}dt$ pour $|z| < r < \rho$.

2. Si g est holomorphe sur $B(z_0,\rho)$, alors la fonction $f : z \mapsto g(z_0+z)$ est holomorphe sur $B(0,\rho)$. On peut donc lui appliquer le théorème précédent et on a
$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ sur } B(z_0,\rho) \text{ avec } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0+re^{it})e^{-int}dt$$

Corollaire 2.7 (formule intégrale de Cauchy) *Soit f holomorphe sur $B(z_0,\rho)$ et $0 < r < \rho$. Alors*
$$(\forall z \in B(z_0,r))\quad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{it}-z} re^{it}dt$$

Corollaire 2.8 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. La fonction f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique sur U.*

Corollaire 2.9 *Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0,r)$. Alors f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur $B(z_0,r)$, c'est-à-dire*
$$(\forall z \in B(z_0,r))\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Remarque. En particulier, une fonction analytique sur $B(z_0,r)$ est développable en série entière en z_0 sur $B(z_0,r)$ tout entier.

Corollaire 2.10 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique sur U et g analytique sur V avec $f(U) \subset V$. Alors la composée $g \circ f$ est analytique sur U.*

Corollaire 2.11 (inégalité de Cauchy) *Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U et $\overline{B}(z_0,r) \subset U$. Alors, pour tout entier n on a*
$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{1}{r^n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|$$

Corollaire 2.12 (égalité de Cauchy) *Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, soit z_0 dans U et $\overline{B}(z_0,r) \subset U$. Alors*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt$$

2.3 Liouville, D'Alembert-Gauss, principe du module maximum et application ouverte

Théorème 2.13 (Liouville) *Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est bornée est constante sur $\mathbb{C}$.*

Théorème 2.14 (D'Alembert Gauss) *Soit P un polynôme à coefficients complexe. Si P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, il est constant.*

Remarque. En faisant la division euclidienne de P par $X-\alpha$ où α est la racine de P et en itérant, on montre que P se factorise par des polynômes de degré un.

Théorème 2.15 (principe du module maximum) *U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U. Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0 de U, alors f est constante sur U.*

Remarque. 1. Dans le *paysage analytique de f sur U* (*i.e.* le graphe de $|f|$ comme surface de $\mathbb{R}^3$), il n'y a pas de "sommets".

2. Si f possède un maximum global sur $\overline{U}$ (c'est le cas si $\overline{U}$ est compact et f continue sur $\overline{U}$), alors ce maximum est atteint sur la frontière de $\overline{U}$.

Théorème 2.16 (application ouverte) *U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f est holomorphe sur U et non constante. L'image par f de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Remarque. 1. Un ouvert de U, c'est un ouvert de $\mathbb{C}$.

2. L'image d'un ouvert non vide par une application holomorphe non constante n'est pas "petite".

2.4 Equations de Cauchy Riemann

2.4.1 Applications $\mathbb{R}$-linéaires, applications $\mathbb{C}$-linéaires

Rappel. On note $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, isomorphe à $M_2(\mathbb{R})$: chaque u de $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ peut être représenté par une matrice à coefficients réels dans la base canonique de $\mathbb{C}$.

Remarque. Si u est dans $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ (*i.e.* si u est $\mathbb{C}$-linéaire), alors $u(z) = a.z$ pour un certain a de $\mathbb{C}$. $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Si une application u est $\mathbb{C}$-linéaire, elle est aussi $\mathbb{R}$-linéaire : on a $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \subset L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Parmi les matrices représentant les applications de $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, on reconnaît ainsi celles d'une application de $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$:

Proposition 2.17 *Soit u dans $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. L'application u est dans $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ si et seulement si sa matrice dans la base canonique $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ est du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.*

2.4.2 Fonction différentiable et fonction holomorphe

Rappel. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de U dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de U. On dit que f est *différentiable* en (x_0, y_0) si l'on peut trouver deux vecteurs a, b et une fonction β tels que pour tous réels k et ℓ on ait

$$f(x_0 + k, y_0 + \ell) = f(x_0, y_0) + a.k + b.\ell + \beta(k, \ell).\sqrt{k^2 + \ell^2} \quad \text{avec } \lim_0 \beta = 0$$

Ici, k et ℓ sont réels et $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont dans $\mathbb{R}^2$.

On peut voir f comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$z = x + iy = (x, y), \quad z_0 = (x_0, y_0), \quad \text{et} \quad h = (k, \ell)$$

On a alors

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + a.k + b.\ell + \beta(h).|h| \quad \text{avec } \lim_0 \beta = 0$$

Remarquez que l'application $h \mapsto a.k + b.\ell$ est $\mathbb{R}$-linéaire. C'est ce qu'on appelle la *différentielle de f* au point (x_0, y_0). Sa matrice dans la base $(1, i)$ est appelée *Jacobienne de f en* (x_0, y_0).

Rappel. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. f est dérivable au sens complexe en z_0 si on peut trouver un complexe α et une application γ tels que pour tout complexe h on ait

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h.\alpha + \gamma(h).|h| \quad \text{avec } \lim_0 \gamma = 0$$

Cette fois ci, l'application $h \mapsto h.\alpha = \alpha.k + i\alpha.\ell$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Remarque. Une application dérivable au sens complexe en z_0 est différentiable en z_0. Réciproquement :

Proposition 2.18 *Soit un ouvert U de $\mathbb{C}$, une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 dans U. L'application f est dérivable au sens complexe en z_0 si et seulement si elle est différentiable en z_0 (i.e. admet des dérivées partielles en z_0) et si ses dérivées partielles satisfont l'une des deux choses équivalentes suivantes :*

1. $(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y})(z_0) = 0$

2. $$\left\{ \begin{array}{l} (\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y})(z_0) = 0 \\ (\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y})(z_0) = 0 \end{array} \right. \quad avec\ P(z) = Re(f(z))\ \ et\ Q(z) = Im(f(z)).$$

Remarque. Ces équations signifient simplement que la Jacobienne de f au point (x_0, y_0) est la matrice d'une application $\mathbb{C}$-linéaire.

CHAPITRE 3

INTÉGRATION SUR UN CHEMIN, PRIMITIVES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

On s'intéresse dans ce chapitre au problème suivant : existe-t-il des primitives d'une fonction holomorphe donnée ? Plus précisément, si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U, existe-t-il une fonction $F : U \to \mathbb{C}$ dérivable au sens complexe avec $F' = f$? Si F existe, elle sera holomorphe sur U. On peut s'attendre à des problèmes comme le montre l'exemple de $z \mapsto 1/z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mais qui n'admet pas de primitive sur cet ensemble : une primitive de $1/z$ sur un ouvert connexe est une détermination du logarithme népérien, et on a vu au chapitre 1 qu'il n'y avait pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour trouver une primitive d'une fonction f de la variable réelle, on définit son intégrale $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ entre un point x_0 fixé et x. Pour une fonction continue de la variable complexe, commençons par définir son intégrale sur un chemin de z_0 à z.

3.1 Intégration sur un chemin

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 (chemin, lacet) On appelle **chemin** une applicatiopn d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ notée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ qui soit *continue* et C^1 *par morceaux* (i.e. il y a des réels $a_0, \dots, a_k$ tels que $a = a_0 < \dots < a_k = b$ et $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est de classe C^1). En particulier, l'intgrale $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$ existe. On l'appelle la longueur du chemin γ et on la note $\ell(\gamma)$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin γ se referme et on dit que c'est un **lacet**.

Vocabulaire. Si γ est un chemin, on appelle l'image $\gamma([a, b])$ un **chemin géométrique**. On dit que γ est un **paramétrage** de $\gamma([a, b])$.

Exemples.

1. Si α et β sont deux points de $\mathbb{C}$, le chemin γ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe $\alpha+t(\beta-\alpha)$ est un paramétrage du "segment $[\alpha, \beta]$". On a $\ell(\gamma) = |\beta - \alpha|$.
2. Le chemin de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ qui à t associe $z_0 + re^{it}$ est un paramétrage du cercle $S(z_0, r)$. On note $C(z_0, r)$ ce paramétrage. On a $\ell(\gamma) = 2\pi r$.

Définition 3.2 (intégrale sur un chemin) Soit f de U dans $\mathbb{C}$ continue et $\gamma : [a, b] \to U$ un chemin. On appelle **intégrale de f sur γ** le nombre complexe

$$\int_a^b f(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$$

On le note $\int_\gamma f(z)dz$.

Remarque. $\int_\gamma f(z)dz$ n'est qu'une notation, il s'agit bien d'une intégrale d'une fonction continue de la variable réelle.

Exemple 3.3

1. $\displaystyle\int_\gamma 1.dz = \int_a^b \gamma'(t)dt = \gamma(b) - \gamma(a).$
2. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i$

3. Soit f holomorphe sur U avec $B'(z_0, r) \subset U$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ sa série de Taylor en z_0.

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{r^{n+1}e^{i(n+1)t}} ire^{it} dt = 2\pi i\Big(\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})e^{-int}dt\Big) = 2\pi i a_n$$

4. Pour une fonction f holomorphe sur $B'(0,1)$, la formule de Cauchy du Corollaire 5 s'écrit :

$$2\pi i f(z) = \int_{C(0,1)} \frac{f(u)}{u-z} du$$

5. On pose $C^*(0,1) : [0, 2\pi] \to S(0,1)$ le chemin qui à t associe e^{-it}, et $\gamma : [0,1] \to S(0,1)$ celui défini par $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. On a

$$\int_{C^*(0,1)} \frac{dz}{z} = -2\pi i \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

3.1.2 Propriétés

L'intégrale sur un chemin ne dépend que du chemin géométrique orienté :

Proposition 3.4 *Soient deux intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ de $\mathbb{R}$, non vides, un chemin $\gamma : [a,b] \to U$ et une fonction $f : U \to C$ continue. Soit $\phi : [c,d] \to [a,b]$ une bijection de classe C^1.*

1. *Si ϕ est croissante, on a $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.*
2. *Si ϕ est décroissante, on a $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.*

Exemple 3.5 Si $\gamma : [a,b] \to U$ est un chemin, on note $\gamma^* : [a,b] \to U$ le chemin défini par $\gamma^*(t) = \gamma(a+b-t)$. On a $\int_{\gamma^*} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$.

On peut aussi composer les chemins :

Proposition 3.6 *Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un chemin, c dans $]a,b[$ et soient $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Proposition 3.7 1. *Pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to C$ et toute fonction f continue sur $\gamma([a,b])$, on a*

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq \sup_{t\in\gamma[a,b]} |f| \cdot \ell(\gamma)$$

2. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues de U dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément vers $f : U \to \mathbb{C}$ sur les compacts de U, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

3.1.3 Cas des fonctions holomorphes

Proposition 3.8 *Si $F : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $F' = f$, on a*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En particulier, si γ est un lacet dans U, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemples. 1. Soit γ un paramétrage du cercle unité. Alors $\int_\gamma z^n dz = 0$ pour tout $n \geq 0$.

2. $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pm 2\pi i$. Il n'existe donc aucun ouvert contenant le cercle unité sur lequel la fonction $z \mapsto 1/z$ possède des primitives.

3.2 Homotopie des chemins et intégrales sur des chemins homotopes

On montre dans cette section que l'intégrale sur un chemin γ dans U d'une fonction holomorphe f sur U ne change pas en déformant γ dans U continument. Il faut avant cela rendre précise la notion de "déformation continue" d'un chemin : c'est la notion d'homotopie.

Théorème 3.9 *Soit un ouvert U de $\mathbb{C}$, une application $\Gamma : [0,1]^2 \to U$ de classe C^1 et f une fonction holomorphe sur U. Soit $\partial\Gamma$ un lacet qui paramètre le bord de $\Gamma([0,1]^2)$, (*i.e. *si γ est un paramétrage du bord du carré $[0,1]^2$, alors $\partial\Gamma = \Gamma \circ \gamma$). Alors*

$$\int_{\partial\Gamma} f(z)dz = 0$$

Remarque. 1. l'hypothèse sur f est locale (holomorphie en chaque point de U) mais la conclusion est globale : il s'agit de l'intégrale sur un lacet.

2. Il est important que l'image $\Gamma([0,1]^2)$ du carré soit incluse dans U. Un contre-exemple : si Γ est constante sur $[0,1]^2$ on a $\int_{\partial\Gamma} \frac{dz}{z} = \pm 2\pi i$.

Définition 3.10 (homotopie avec extrémités fixes, homotopie de lacets)
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, deux chemins γ_0 et γ_1 de $[0,1]$ dans U. On dit que γ_0 et γ_1 sont **homotompes dans U avec extrémités fixes** si γ_0 et γ_1 ont même originie α, même fin β, et s'il existe une application continue $\Gamma : [0,1] \to U$ telle que pour tout t et s dans $[0,1]$ on ait

$$\gamma_0(t) = \Gamma(0,t), \quad \gamma_1(t) = \Gamma(1,t), \quad \alpha = \Gamma(s,0) \quad \text{et} \quad \beta = \Gamma(s,1)$$

Si γ_0 et γ_1 sont des lacets, on dit qu'ils sont **homotopes dans U en tant que lacets** s'il existe une application continue $\Gamma : [0,1] \to U$ telle que telle que $t \mapsto \Gamma(s,t)$ soit un lacet pour tout s et que pour tout t on ait

$$\gamma_0(t) = \Gamma(0,t) \quad \text{et} \quad \gamma_1(t) = \Gamma(1,t)$$

Dans les deux cas, on appelle l'application Γ une homotopie

Remarque. Ce sont deux relations d'équivalence, la première sur l'ensemble des chemins dans U, la deuxième sur l'ensemble des lacets dans U.

Exemples. 1. Deux cerles $S(a,r_1)$ et $S(b,r_2)$ dans $\mathbb{C}$ sont homotopes dans $\mathbb{C}$ en tant que lacets par l'homotopie $\Gamma(s,t) = s(a + r_1e^{it}) + (1-s)(b + r_2e^{it})$ qui est de classe C^1. Pour tout s, le chemin $t \mapsto \Gamma(s,t)$ est un paramétrage du cercle de centre $sa + (1-s)b$ et de rayon $sr_1 + (1-s)r_2$ et définit bien un lacet.

2. Deux chemins γ_0 et γ_1 ayant les mêmes extrémités dans $\mathbb{C}$ sont homotopes à extrémités fixes par l'homotopie $\Gamma(s,t) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$.

3. Dans $\mathbb{C}$, un cercle (ou un lacet) et un point sont toujours homotopes en tant que lacets.

4. Dans $\mathbb{C}^*$, un cercle autour de l'orgine n'est homotope à aucun point.

Corollaire 3.11 *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U, deux chemins γ_0 et γ_1 à valeurs dans U.*

1. *Si γ_0 et γ_1 sont homotopes à extrémités fixes dans U par une homotopie de classe C^1, alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

2. *Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes sur U par une homotopie de classe C^1, alors*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Remarque. Il est crucial que γ_0 et γ_1 soient homotopes dans U et que f soit holomorphe sur ce même U. Penser à $1/z$ dans $\mathbb{C}^*$ sur deux demi cercles de centre 0.

Remarque. On peut redémontrer facilement la formule intégrale de Cauchy par homotopie.

3.3 Connexité simple et primitives de fonctions holomorphes

3.3.1 Un peu plus de topologie

Proposition-définition 3.12 (partie connexe,composante connexe d'un point)
Une partie de $\mathbb{C}$ est connexe si elle n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vide. Si A est une partie de $\mathbb{C}$ et a un élément de A on appelle *composante connexe de* a *dans* A la réunion de toutes les parties connexes de A qui contiennent a. C'est la plus grande partie connexe de A contenant a.

Remarque. Avoir la même composante connexe dans A est une relation d'équivalence sur A. Les composantes connexes de A forment une partition de A.

Exemples.
1. On dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est *connexe par arcs* si pour tout point a et b de A il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to A$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Un partie connexe par arcs est connexe.
2. $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes.
3. le complémentaire $\mathbb{C} \setminus S(0,1)$ du cercle unité a deux composantes connexes : une bornée et une non bornée.
4. le complémentaire d'un lacet dans $\mathbb{C}$ n'a qu'une seule composante connexe non bornée.

Définition 3.13 (connexité simple) Une partie A de $\mathbb{C}$ est *simplement connexe* si elle est connexe par arcs et si tout lacet γ dans A basé en z_0 est homotope dans A au lacet constant égal à z_0.

Remarque. Être simplement connexe implique être connexe par arcs, qui implique être connexe. La connexité simple est un rafinement de la notion de connexité : c'est être en un seul morceau, et "sans trou".

Exemples.
1. $\mathbb{C}$ est simplement connexe.
2. Une partie convexe de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.
3. Plus généralement, on dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est étoilée en un point z_0 si z_0 appartient à A et si pour tout a dans A le segment $[z_0, a]$ est inculs dans A. Une partie étoilée de $\mathbb{C}$ est simplement connexe.
4. Soient U et V deux parties simplement connexes. En général, $U \cap V$ et $U \cup V$ ne sont pas simplement connexes. Mais si $U \cap V$ est connexe, alors $U \cup V$ est simplement connexe.
5. $\mathbb{C}^*$ est connexe, mais pas simplement connexe.

Proposition 3.14 *Sur un ouvert simplement connexe U, toute fonction holomorphe admet une primitive (holomorphe sur U).*

Remarque.
1. Une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé admet une primitive.
2. $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe, sinon $z \mapsto 1/z$ aurait une primitive sur $\mathbb{C}^*$.

3.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'holomorphie

Théorème 3.15 (Morera) *U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. La fonction f est holomrphe sur U si et seulement si elle est continue et pour tout triangle ABC inclus dans U on a*

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CA} f(z)dz = 0$$

Remarque. C'est une relation de Chasles.

Corollaire 3.16

Corollaire 3.17

3.4 Indice d'un point par rapport à un lacet