Théorie de la mesure, et intégration selon Lebesgue
Chapitre 1 : Intégrale de Riemann

Exercice 1. Montrer que si f et g sont deux fonctions Riemann intégrables sur un intervalle I, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont Riemann intégrables sur I.

Exercice 2 (la composée de deux fonctions Riemann intégrables ne l'est pas forcément)**.** Soit f la fonction caractéristique de $]0,1]$, et g la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui à x associe $\frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ ou 0 si x est irrationnel. Ces fonctions sont-elles Riemann intégrables ? Calculer $f \circ g$. Que pouvez vous en déduire ?

Exercice 3. Soient f Rieman intégrable de I dans $\mathbf{R}$ et Φ une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\Phi \circ f$ est Riemann intégrable sur I. On pourra commencer par le cas plus simple d'une fonction f positive et démontrer que $\sqrt{f}$ est Riemann intégrable.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction monotone sur l'intervalle I est Riemann intégrable sur I.

Exercice 5. (Un exemple de fonction non réglée, Riemann-intégrable) Montrez que la fonction $f(x) = \sin(1/x)$ sur $]0,1]$ et qui vaut 0 en 0 est Riemann-intégrable, mais n'est pas limite uniforme de fonctions en escaliers.

Exercice 6 (un exemple de limite simple de fonctions Riemann intégrables qui n'est pas Riemann intégrable)**.** On considre la fonction $f(x)$ définie par $\lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \big(\cos(2\pi n! x)\big)^k$. Cette fonction est-elle bien définie ? Calculer la valeur de $f(x)$ en chaque point. En déduire qu'il existe une limite simple de fonctions Riemann intégrables qui n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 7 (un théorème d'échange $\lim_{n\to+\infty}$ et $\int$ sans hypothèse de convergence uniforme)**.** Soit f_n une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la suite $\int_I f_n$ converge vers zéro. En déduire que si f_n converge simplement vers f, et si f est continue, alors la suite $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$.

Exercice 8 (ensembles négligeables)**.** On dit qu'un ensemble N de $\mathbf{R}$ est *négligeable* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une réunion dénombrable d'intervalles $I_1, I_2, \ldots$ qui contient N et dont la somme des longueurs $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$ est au plus ϵ.

1. Montrer que les ensembles finis, et les ensembles dénombrables sont néglibeables.
2. Montrer qu'une réunion dénombrables d'ensembles négligeables est négligeable.
3. Soit f une fonction Riemann intégrable sur I. Si l'ensemble des points x de I tels que $f(x) < 0$ est négligeable, montrer que l'on a $\int_I f \geq 0$.
4. Si f s'annule partout sur I sauf sur un ensemble négligeable, montrer que l'on a $\int_I f = 0$.