Théorie de la mesure, et intégration selon Lebesgue
Chapitre 2 : Théorie de la mesure

Exercice 1 (exemples élémentaires de tribus)**.** Soit X un ensemble. Quelle est la tribu sur X engendrée par les singletons ? par les paires d'éléments ? par toutes les parties finies ? Soit A une partie de X. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties contenant A ?

Exercice 2 (opérations sur les tribus)**.** Soit X un ensemble. L'intersection de deux tribus sur X est-elle toujours une tribu ? La réunion de deux tribus sur X est-elle toujours une tribu ?

Exercice 3 (tribu des traces et trace d'une tribu)**.** Soit X un ensemble, et Y une partie quelconque de X. Pour tout ensemble $\mathcal{A}$ de parties de X, on appelle *trace* de $\mathcal{A}$ sur Y l'ensemble $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$. On la note $\mathcal{A} \cap Y$. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une tribu, sa trace $\mathcal{B} \cap Y$ sur Y est une tribu sur Y. Montrer que $\sigma(\mathcal{A} \cap Y)$ est égal à $\sigma(\mathcal{A}) \cap Y$. Si Y est une partie de $\mathbf{R}^n$, la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y)$ est-elle égale à la trace $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \cap Y$ de $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ sur Y ?

Exercice 4 (cardinal d'une tribu)**.** On cherche à déterminer la « taille » d'une tribu $\mathcal{B}$ sur un ensemble X.

1. Comme premier exemple, on considère des parties disjointes $A_1, \dots, A_n$ de X. Quelle est la tribu engendrée par $A_1, \dots, A_n$? Et si les parties $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas disjointes ? Quel est le cardinal de cette tribu ?
2. Pour tout élément x de X, on note $B(x)$ l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent x. Montrer que les ensembles $B(x)$ forment une partition P de X. Décrire la tribu engendrée par cette partition. Montrer qu'elle est en bijection avec 2^P. Est-elle dénombrable ? Si la tribu $\mathcal{B}$ est finie ou dénombrable, montrer qu'elle est engendrée par la partition précédente. Conclusion ?

Exercice 5. Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ telle que la mesure d'un intervalle (a, b) soit égale à $f(b) - f(a)$.

Exercice 6 (mesure de Lebesgue et topologie)**.**

1. Quelle est la mesure de Lebesgue d'un singleton ? de $\mathbf{N}$? Montrer qu'un ouvert borné de $\mathbf{R}$ est de mesure de Lebesgue finie. Réciproquement, un ouvert de mesure finie est-il toujours borné ? Pour tout $\varepsilon > 0$, construire un ouvert dense de mesure ε.
2. Soit B un borélien de $\mathbf{R}$. Montrer que si B contient un ouvert non vide, sa mesure de Lebesgue est strictement positive. La réciproque est-elle vraie ?
3. Construire un borélien A de $\mathbf{R}$ diffus, *i.e.* tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$.

Exercice 7 (Limites d'ensembles et lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit X un ensemble et A_n une suite de parties de X. On définit les deux ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ en posant

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

Comparer $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$. On dit que la suite *converge* si les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ sont égaux, et on appelle *limite de* A_n cette valeur commune. Si la suite A_n est monotone, est-elle convergente ? Si X est un espace mesuré et A_n une suite de parties mesurables telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, montrer que $\limsup_n A_n$ est mesurable et de mesure nulle.

Exercice 8 (ensembles négligeables)**.** Au chapitre 1, on a vu qu'un sous-ensemble N de $\mathbf{R}$ était négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existait une réunion dénombrable d'intervalles $I_1, I_2, \ldots$ recouvrant N telle que la somme $\sum \ell(I_i)$ valle au plus ε. Montrer que cette définition coïncide avec la définition d'un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.