Théorie de la mesure, et intégration selon Lebesgue
Chapitre 3 : la mesure de Lebesgue

Exercice 1 (aire d'un disque, volume d'une boule).

1. Le disque fermé de centre zéro et de rayon $r > 0$ est-il un borélien de $\mathbf{R}^2$? Quelle est sa mesure de Lebesgue ?
2. Un cylindre de hauteur h et de rayon r est-il un borélien de $\mathbf{R}^3$? Quelle est sa mesure de Lebesgue ? (on pourra approcher le cylindre par des pavés disjoints)
3. Quelle est la mesure de la boule fermée de $\mathbf{R}^3$ de centre zéro et de rayon r ?
4. Quel est la mesure d'une sphère ?

Exercice 2 (une caractérisation de la mesure de Lebesgue). Montrer que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure μ sur les boréliens de $\mathbf{R}^n$ qui soit invariante par translation et vérifie $\mu\big([0,1]^n\big) = 1$.

Exercice 3 (une application lipschitzienne qui ne préserve pas les Lebesgue négligeables). Trouver une application lipschitzienne de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ et un ensemble Lebesgue négligeable N de $\mathbf{R}^2$ tel que $f(N)$ ne soit pas Lebesgue négligeable. Peut-on choisir N de telle sorte que $f(N)$ ne soit même pas Lebesgue mesurable ? Est-ce en contradiction avec le cours ?

Exercice 4 (une application localement lipschitzienne préserve les Lebesgue négligeables). Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$. On dit que f est *localement lipschitzienne* si pour tout x dans $\mathbf{R}^n$ il existe un voisinage $V(x)$ de x sur lequel f soit lipschitzienne (de rapport k_V dépendant de V et de x).

1. Montrer qu'un compact de $\mathbf{R}^n$ est recouvert par un nombre fini de boules sur chacune desquelles f est lipschitzienne.
2. En déduire que si N est un ensemble Lebesgue négligeable borné, alors $f(N)$ est Lebesgue-négligeable.
3. Que dire de l'image d'un ensemble Lebesgue négligeable par f ?
4. Montrer qu'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^1 est localement lipschitzienne.
5. Soit g une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. Rappelez la définition d'être différentiable au point (x, y) de $\mathbf{R}^2$. Montrer que si g est de classe C^1, elle est localement lipschitzienne.

Exercice 5 (courbe de Hilbert et image continue d'un Lebesgue mesurable). Pour tout intervalle borné I de $\mathbf{R}$, on note $P_4(I)$ une partition de I en 4 intervalles I_1, I_2, I_3, I_4 de même longueur, en rangeant ces intervalles par odre croissant. On définit une suite de partitions $(P_{4^n}[0,1])_{n\geqslant 1}$ de l'intervalle $[0,1]$ de la manière suivante : $P_4[0,1] = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ étant choisie, on pose $P_{4^2}[0,1] = P_4(I_1) \cup \cdots \cup P_4(I_4)$ et on continue par récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $(I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{4^n}^n)$ la liste des élélents de $P_{4^n}[0,1]$, en les rangeant par ordre croissant (i.e. I_k^n et I_{k+1}^n sont adjacents).

De manière similaire, pour tout carré C de $\mathbf{R}^2$, on note $P_4(C)$ une partition de C en 4 carrés C_1, C_2, C_3, C_4 de même surface. On définit une suite de partitions $(P_{4^n}[0,1]^2)_{n\geqslant 1}$ du carré $[0,1]^2$: $P_4[0,1]^2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ étant choisie en ordonnant les carrés C_i de manière à ce que deux carrés consécutifs soient adjacents et de sorte que C_1 contienne l'origine, et C_4 le point $(1,0)$, on pose $P_{4^2}[0,1]^2 = P_4(C_1) \cup \cdots \cup P_4(C_4)$ et on continue par récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $(C_1^n, C_2^n, \ldots, C_{4^n}^n)$ la liste des éléments de $P_{4^n}[0,1]$, en les ordonnant de manière à ce que deux carrés consécutifs soient adjacents et de sorte que les 4 premiers carrés partitionnent C_1^{n-1}, les 4 suivants C_2^{n-1} etc.

1. Sur un dessin, construire trois premières partitions $P_4[0,1]^2$, $P_{4^2}[0,1]^2$ et $P_{4^3}[0,1]^2$ du carré unité en numérotant les éléments dans l'ordre demandé (reliez les centres des carrés consécutifs par un segment).
2. Montrez que si deux intervalles provenant de partitions consécutives sont emboîtés (i.e. $I_k^{n+1} \subset I_j^n$), alors les carrés correspondants le sont aussi (i.e. $C_k^{n+1} \subset C_j^n$). Réciproque ?
3. On définit une fonction f de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$ de la manière suivante : pour tout n, chaque point t de $[0,1]$ appartient à un unique intervalle $I_{k(n)}^n$ (on a donc $\{t\} = \bigcap_{n\geqslant 1} I_{k(n)}^n$). En utilisant la question précédente, montrer que l'intersection des carrés fermés $\bigcap_{n\geqslant 1} \overline{C_{k(n)}^n}$ est un singleton. On pose $f(t)$ égal à son unique élément.
4. Montrer que f est surjective sur $[0,1]^2$ (utiliser un argument similaire).
5. Montrer que si $|t_1 - t_2| \leqslant 4^{-n}$, alors $f(t_1)$ et $f(t_2)$ sont dans un même rectangle de côtés 2^{-n} et 2×2^{-n}. En déduire que f est continue.
6. On vient de contruire une fonction continue et surjective de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$, appelée *courbe de Hilbert*, qui « remplit » le carré. Si X est une partie de $\mathbf{R}^2$ non Lebesgue mesurable, que dire de la mesure de $\{0\} \times f^{-1}(X)$ dans $\mathbf{R}^2$? En utilisant la fonction f, contruire une fonction continue g de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ qui envoit $\{0\} \times f^{-1}(X)$ sur X. La fonction g est-elle lipschitzienne ?

Exercice 6 (Les isométries euclidiennes de $\mathbf{R}^n$ sont affines)**.** Soit f une isométrie de $\mathbf{R}^n$ pour la norme euclidienne, i.e. telle que pour tout x et y dans $\mathbf{R}^n$, on ait $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. On cherche à montrer que $f(x)$ se met sous la forme $Ax + b$ où A est une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ et b un élément de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que l'on peut se ramener à montrer qu'un translaté g de f est linéaire.
2. Montrer que g préserve le produit scalaire : pour tout x et y, on a $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. Montrer que g est linéaire. (on pourra calculer $\langle g(\lambda x), \lambda g(x)\rangle$ et $\langle g(x+y), g(x)+g(y)\rangle$)
4. Si $g(x) = Ax$, montrer que ${}^t x {}^t A A x = {}^t x x$ et en déduire que A est une matrice orthogonale.

Exercice 7 (un exemple de borélien : les points de continuité d'une fonction forment un G_δ)**.** Soit f une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$, et soit C l'ensemble des points de $\mathbf{R}^n$ où f est continue. On cherche à montrer que C est un G_δ.

1. Montrer que f est continue au point a si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$(\exists \delta > 0)\big(\forall x \in B(a,\delta)\big)\big(\forall y \in B(a,\delta)\big) \quad \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon. \tag{1}$$
2. Montrer que l'ensemble des points a qui vérifie la condition (1) forme un ouvert de $\mathbf{R}^n$.
3. En déduire que C est une intersection dénombrable d'ouverts.