The Journal of Symbolic Logic
Volume 79, Number 4, December 2014

GROUPES FINS

CÉDRIC MILLIET

Abstract. We investigate some common points between stable structures and weakly small structures and define a structure M to be *fine* if the Cantor-Bendixson rank of the topological space $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$ is an ordinal for every finite subset A of M and every formula $\varphi(x, y)$ where x is of arity 1. By definition, a theory is *fine* if all its models are so. Stable theories and small theories are fine, and weakly minimal structures are fine. For any finite subset A of a fine group G, the traces on the algebraic closure $acl(A)$ of A of definable subgroups of G over $acl(A)$ which are boolean combinations of instances of an arbitrary fixed formula can decrease only finitely many times. An infinite field with a fine theory has no additive nor multiplicative proper definable subgroups of finite index, nor Artin-Schreier extensions.

Les groupes dont la théorie est à la fois stable et menue [1] ont été étudiés par F. Wagner dans [15] et [16] où il est démontré qu'ils héritent de bien des propriétés des groupes omega-stables. L'étude des groupes et corps menus sans hypothèse de stabilité supplémentaire est plus récente [6, 8, 9, 10, 17].

Il s'avère que les structures algébriques menues et les structures stables ont de nombreux caractères sinon semblables, du moins analogues. Les corps infinis tout d'abord ; qu'ils soient stables ou menus, ils n'ont pas de sous-groupes définissables d'indice fini, ni additifs, ni multiplicatifs (A. Macintyre [11] pour les corps stables, F. Wagner [17, Proposition 6] pour les corps menus et [9] pour les corps minces). Les corps menus infinis sont algébriquement clos (F. Wagner [17]), tandis que les corps superstables infinis sont algébriquement clos (G. Cherlin et S. Shelah [3]), que les corps stables infinis n'ont pas d'extensions de type Artin-Schreier (T. Scanlon [5,14]), et on conjecture qu'ils n'ont pas d'extensions séparables (voir [18]). Les corps gauches de caractéristique positive ayant une théorie menue sont commutatifs [6], et ceux dont la théorie est stable sont de dimension finie sur leur centre [7]. Dans une structure stable, les groupes infiniment définissables sont l'intersection de groupes définissables (E. Hrushovski [4]). Dans une structure menue, c'est aussi vrai pour les groupes infiniment définissables à l'aide d'un nombre fini de paramètres [8]. Les groupes stables sont soumis à des conditions de chaîne descendante uniformes (J. Baldwin et J. Saxl [2, 11]), tandis que les groupes menus sont eux soumis à des conditions de chaîne descendante locales [9]. Les groupes menus ou superstables,

Received March 15, 2013.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C45, 03C60.
Key words and phrases. Model theory, Cantor-Bendixson rank, local descending chain condition, Artin-Schreier extension.

[1] Le terme *menu* est introduit par B. Poizat et F. Wagner dans [13] ≪ comme une traduction infidèle mais bien moins pâle que l'original du mot anglais *small* ≫.

0022-4812/14/7904-0008/$3.40
DOI:10.1017/jsl.2014.12

s'ils sont infinis, ont un sous-groupe abélien infini (C. Berline et D. Lascar [1, 9]). La question est toujours ouverte pour les groupes stables.

Nous essayons ici de pousser un peu plus loin cette analogie et de mettre le doigt sur quelques points communs à ces deux classes de structures. Lorsque cela nous semble possible, nous tentons de nous passer du théorème de compacité pour englober les structures minimales.

NOTATIONS. *L est un langage fixé, M une L-structure, $\mathfrak{C}$ une extension suffisamment saturée de M et $A \subset \mathfrak{C}$ un ensemble de paramètres. On note $Aut(\mathfrak{C}/A)$ le groupe des L-automorphismes de $\mathfrak{C}$ fixant A point par point. La* clôture définissable *de A notée $dcl(A)$ est l'ensemble des points de M qui sont invariants sous l'action de $Aut(\mathfrak{C}/A)$. La* clôture algébrique *de A notée $acl(A)$ est l'ensemble des points de M qui ont une orbite finie sous cette action. Si n est un entier naturel, E une relation d'équivalence sur M^n définissable sur A, on note a_E la classe d'équivalence d'un point a de M^n et on dit que a_E est un paramètre* imaginaire (*typiquement, dans un groupe, un coset d'un sous-groupe A-définissable*). *L'élément a_E est dans la* clôture imaginaire de *A s'il est fixe sous l'action naturelle de $Aut(\mathfrak{C}/A)$ sur M^n/E. On note $dcl^{eq}(A)$ l'ensemble des éléments de la clôture imaginaire de A.*

Étant données deux formules $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ où l'uplet y est de longueur n, on note $\psi(x, a_E)$ la formule $(\exists y)(aEy \wedge \psi(x, y))$, et on appelle φ-formule sur *A toute combinaison booléenne finie de formules du type $\varphi(x, b)$ où b est un n-uplet de paramètres de A. Par abus de langage, si $\psi(x, a)$ est une φ-formule, on dira que $\psi(x, a_E)$ est une φ-formule sur $\{a_E\}$. Un* φ-ensemble sur *A est un ensemble défini par une φ-formule sur A. Nous disons qu'une formule $\psi_1(x, b)$ (avec paramètres b) est* A-invariante *si elle est équivalente à une formule $\psi_2(x, a)$ à paramètres a dans A, ou de manière équivalente si l'ensemble $\psi_1(\mathfrak{C}, b)$ des réalisations de $\psi_1(x, b)$ est globalement invariant sous l'action de $Aut(\mathfrak{C}/A)$. Si une φ-formule sur A est bien sûr A-invariante, une φ-formule A-invariante n'est pas toujours équivalente à une φ-formule sur A (dans le langage des corps, prendre par exemple pour $\varphi(x, y)$ la formule $x = y$; la formule $x = i \vee x = -i$ est une φ-formule $\emptyset$-invariante, mais n'est pas une φ-formule sur le vide). Toutefois,*

LEMME 1. *Une φ-formule A-invariante est équivalente à une φ-formule sur $dcl^{eq}(A)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\psi(x, a)$ une φ-formule A-invariante où a est d'arité n, et soit $E(y, z)$ la relation d'équivalence sur M^n définie par $(\forall x)(\psi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, z))$. Les formules $\psi(x, a)$ et $\psi(x, a_E)$ sont équivalentes, et a_E est dans $dcl^{eq}(A)$ par A-invariance de $\psi(x, a)$. $\dashv$

En particulier, si a est un paramètre algébrique sur le vide, et si l'on note $\overline{\varphi}(x, a)$ et $\mathring{\varphi}(x, a)$ respectivement la disjonction et la conjonction des formules $\varphi(x, b)$ où b parcourt l'ensemble des conjugués de a sous l'action de $Aut(\mathfrak{C})$, les φ-formules $\overline{\varphi}(x, a)$ et $\mathring{\varphi}(x, a)$ sont équivalentes à des φ-formules sur la clôture imaginaire du vide. Si X est le sous-ensemble de M défini par $\varphi(x, a)$, on notera $\overline{X}$ l'ensemble réalisant $\overline{\varphi}(x, a)$, et $\mathring{X}$ celui réalisant $\mathring{\varphi}(x, a)$. Si X est le singleton réduit à a, on préférera écrire $\overline{a}$ à $\overline{\{a\}}$.

Un *φ-type sur A* est un ensemble consistant de φ-formules sur A. On note $tp_\varphi(x/A)$ l'ensemble des φ-formules sur A vérifiées par x. C'est un φ-type complet sur A. On note $S^M_\varphi(A)$, ou simplement $S_\varphi(A)$ si M n'est pas ambiguë, l'ensemble des φ-types complets sur A qui sont consistants avec la théorie de M. C'est un espace topologique compact et séparé dont une base d'ouverts fermés est donnée par l'ensemble des φ-formules sur A. On note $[\psi]$ l'ouvert fermé $\{p \in S_\varphi(A) : \psi \in p\}$ associé à la φ-formule ψ.

Comme il s'agit de généraliser la stabilité et le caractère menu, il nous faut à la fois considérer des types locaux (*i.e.* des φ-types) et des formules $\emptyset$-invariantes (*i.e.* définissables sur le vide). Nous voudrions aussi préserver cette notion en quotientant par une relation d'équivalence définissable, et en ajoutant un nombre fini de paramètres au langage. Plusieurs possibilités s'offrent, de la moins à la plus restrictive :

(1) pour tout ensemble fini de paramètres A, considérer les φ-types sur la clôture définissable de A. Cela suffit pour démontrer le corollaire 3.1 et la proposition 3.2, et pour obtenir des conditions de chaîne locales sur $dcl(A)$, mais pas sur $acl(A)$;
(2) pour tout ensemble fini A, considérer les φ-types sur la clôture algébrique de A formés de formules A-invariantes. Cela suffit à démontrer tous les résultats présentés, mais ne préserve pas l'interprétation ;
(3) pour tout ensemble fini de paramètres A, considérer les φ-types sur la clôture imaginaire $dcl^{eq}(A)$ de A, ou de manière équivalente les φ-types formés de formules A-invariantes. Cette condition est plus forte que (2), mais préservée par interprétation.

§1. Structures fines. La *chaîne des dérivées itérées* d'un espace topologique X est une chaîne de fermés de X définie inductivement en appelant X' l'ensemble des points d'accumulation de X puis en posant

(1) $X^{\alpha+1} = \left(X^\alpha\right)'$ pour un ordinal successeur $\alpha + 1$,
(2) $X^\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^\alpha$ pour un ordinal limite λ.

L'espace X est *clairsemé* si cette chaîne aboutit au vide (c'est le cas en particulier si X est un compact séparé dénombrable) : il y a un plus petit ordinal α tel que X^α soit vide. Si X est compact, cet α a un prédécesseur β que l'on appelle le *rang de Cantor-Bendixson de* X. Si X est de plus séparé, X^β est un ensemble fini. On appelle *degré de Cantor-Bendixson de* X son cardinal.

DÉFINITION 1.1. Une *structure* M *est fine* si pour tout ensemble fini A extrait de M et pour toute formule $\varphi(x, y)$ où l'arité de x est égale à 1, l'espace topologique $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$ est clairsemé.

DÉFINITION 1.2. Une *théorie est fine* si tous ses modèles sont fins.

REMARQUE 1.3. De manière équivalente, une théorie est fine si pour tout modèle M, toute formule $\varphi(x, y)$ (où x est d'arité quelconque) et tout sous-ensemble fini $A \subset M$, l'espace topologique $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$ est clairsemé. La finesse d'une théorie est préservée par produit cartésien fini : si la théorie de M est fine, celle de M^n l'est aussi. Elle est préservée par adjonction de la clôture définissable imaginaire d'un nombre fini de paramètres au langage. Nous verrons qu'elle est aussi préservée par interprétation.

EXEMPLES, CONTRE EXEMPLES. (1) Une théorie est *menue* (*small* en anglais) si pour tout entier n, l'ensemble des n-types complets sans paramètres qui lui sont consistants est dénombrable. Une théorie menue est fine : pour tout ensemble A de taille finie m et pour toute formule $\varphi(x, y)$ où l'uplet de variables x est de longeur n, on a

$$\left|S_\varphi\left(dcl^{eq}(A)\right)\right| \leqslant |S_n(A)| \leqslant |S_{n+m}(\emptyset)| \leqslant \aleph_0.$$

(2) Réciproquement, si dans une théorie T, l'ensemble $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$ est dénombrable pour toute formule φ et tout partie finie A, il n'y a en général aucune raison que T soit menue : il suffit de prendre dans un langage avec une infinité dénombrable de prédicats binaires E_i et de constantes, la théorie disant que les E_i sont des relations d'équivalences ayant 2^i classes toutes infinies, chaque E_{i+1} raffinant E_i en coupant chacune de ses classes en deux, et chacune des classes de E_i étant représentée par une constante du langage.

(3) Une théorie est *stable* s'il existe un cardinal infini κ tel que pour tout ensemble A de paramètres, $|A| \leqslant \kappa$ implique $|S(A)| \leqslant \kappa$, ou encore s'il existe un modèle M de T tel que pour toute formule $\varphi(x, y)$, l'espace $S_\varphi(M)$ soit clairsemé. Une théorie stable T est fine : si $A \subset B$, alors $CB(S_\varphi(A)) \leqslant CB(S_\varphi(B))$. En particulier, si $S_\varphi(M^{eq})$ est clairsemé $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$ l'est aussi pour toute partie finie A.

(4) Une structure M est *mince*[2] si pour tout uplet fini a extrait de M, l'ensemble des 1-types complets sur a est dénombrable : une structure mince (et en particulier une structure minimale, ou *d-mininale* au sens de B. Poizat [12]) est fine.

(5) Le corps des réels n'est pas fin : dans le langage des corps ordonnés, si l'on considère la formule $y_1 < x < y_2$ notée $\varphi(x, y_1, y_2)$, l'espace topologique $S_\varphi(dcl(\emptyset))$ est à base dénombrable, mais son cardinal est $2^{\aleph_0}$: une théorie sans propriété d'indépendance peut ne pas être fine.

(6) Une théorie supersimple n'est pas toujours fine. Considérer le graphe aléatoire dans le langage des graphes augmenté d'une infinité dénombrable de constantes distinctes. La théorie d'un corps pseudo fini est supersimple, mais pas fine (voir le théorème 4.2).

§2. Le φ-rang de Cantor.

Dans la structure M, soit A un uplet fini de paramètres, $\varphi(x, y)$ une formule et X un ensemble définissable sur $dcl^{eq}(A)$. Le *φ-rang de Cantor de X sur A* est défini par l'induction suivante :

$RC_\varphi(X/A) \geqslant 0$ si X est consistant avec un φ-ensemble sur $dcl^{eq}(A)$.
$RC_\varphi(X/A) \geqslant \alpha + 1$ s'il y a une infinité $X_1, X_2, \dots$ de φ-ensembles sur $dcl^{eq}(A)$ deux-à-deux disjoints (ou dont l'intersection deux-à-deux a un rang strictement inférieur à α) tels que $RC_\varphi(X_i \cap X/A) \geqslant \alpha$ pour tout i.
$RC_\varphi(X/A) \geqslant \lambda$ pour un ordinal limite λ si $RC_\varphi(X/A) \geqslant \beta$ pour tout $\beta < \lambda$.

Si p est un φ-type sur $dcl^{eq}(A)$, on définit $RC_\varphi(p/A)$ par

$$RC_\varphi(p/A) = min\{RC_\varphi(\psi/A) : \psi \in p\}.$$

[2]Le terme nous est suggéré par B. Poizat comme transcription de l'anglais *weakly small*.

$RC_\varphi(X/A)$ est alors égal au maximum des rangs des φ-types sur $dcl^{eq}(A)$ qui sont consistants avec X.

REMARQUE 2.1. Le φ-rang de Cantor sur A correspond bien sûr au rang de Cantor-Bendixson dans l'espace topologique $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$: pour tout p dans $S_\varphi(dcl^{eq}(A))$, on a $RC_\varphi(p/A) = CB(p)$ et $RC_\varphi(X/A) = S_\varphi^X(dcl^{eq}(A)))$.

REMARQUE 2.2. Dans le cas stable, les rang locaux sont finis par compacité. Ça n'est pas le cas ici. Prenons par exemple pour langage un prédicat ternaire $E(a, x, y)$, une infinité dénombrable de constantes $a_0, a_1, a_2, \dots$ puis encore des constantes $(b)_{s\in S}$ indicées par des suites de $\mathbf{N}$ à support fini. La théorie précise que

(1) pour tout a, $E(a, x, y)$ est une relation d'équivalence,
(2) $E(a_0, x, y)$ est la relation triviale à une seule classe,
(3) pour tout $a \neq b$, soit $E(a, x, y)$ est la relation triviale, soit $E(b, x, y)$ est la relation triviale, soit $E(a, x, y)$ rafine $E(b, x, y)$ en coupant chacune de ses classes en une infinité de classes toutes infinies, soit $E(b, x, y)$ rafine $E(a, x, y)$ en coupant toutes ses classes en une infinité de classes toutes infinies,
(4) $E(a_{i+1}, x, y)$ est la relation la plus grossière qui rafine $E(a_i, x, y)$,
(5) pour tout $s \in S$, la relation $E(b_s, x, y)$ est triviale,
(6) a_i et b_1 sont dans la même $E(a)$-classe pour tout i et tout a.
(7) pour tout $i > 0$, chaque b_i est dans une $E(a_1)$-classe différente. Pour tout $i > 1$ et $j > 0$, chaque $b_{i,j}$ est dans la $E(a_1)$-classe de b_i, mais dans une $E(a_2)$-classe différente. Pour tout $i > 2$, $j > 0$ et $k > 0$, chaque $b_{i,j,k}$ est dans la $E(a_2)$-classe de $b_{i,j}$, mais dans une $E(a_3)$-classe différente etc.

Visuellement, cet enchevêtrement de classes marquées se comporte comme un arbre infini bien fondé dont le premier noeud a ω fils marqués par $b_1, b_2, \dots$. Chacun de ses fils (sauf le premier) a ω fils, chacun desquels (sauf les ω premiers) a ω fils, chacun desquels (sauf les ω^2 premiers) a ω fils etc. L'espace des $E(y_1, x, y_2)$-types sur le vide est de rang de Cantor au moins omega : en effet l'univers est scindé en une infinité de $E(a_1)$ classes. La première est de rang 0, la deuxième de rang 1, celle d'après de rang 2 etc. D'autre part cette structure n'est pas stable, mais elle élimine les quanteurs et elleest menue.

Le *φ-degré de Cantor de X sur A* est le plus grand entier d tel que X soit consistant avec d φ-ensembles $X_1, \dots, X_d$ deux-à-deux disjoints et définissables sur $dcl^{eq}(A)$ tels que $RC_\varphi(X_i \cap X/A)$ soit maximal. C'est aussi le nombre de types de $S_\varphi^X\big(dcl^{eq}(A)\big)$ ayant un φ-rang de Cantor maximal sur A, ou encore le degré de Cantor-Bendixson de l'espace topologique $S_\varphi^X\big(dcl^{eq}(A)\big)$. Nous noterons $dC_\varphi(X/A)$ ce degré.

Si A est vide, nous écrirons $RC_\varphi(X)$ et $dC_\varphi(X)$ plutôt que $RC_\varphi(X/\emptyset)$ et $dC_\varphi(X/\emptyset)$.

REMARQUE 2.3. Si A est un ensemble de paramètres, $\varphi(x, y)$ une formule, X et Y deux ensembles définissables sur $dcl^{eq}(A)$ dans une structure quelconque et de même arité que x, on a les formules usuelles :

(1) $RC_\varphi(X \cup Y/A) = max\{RC_\varphi(X/A), RC_\varphi(Y/A)\}$.
(2) $dC_\varphi(X \cup Y/A) \leqslant dC_\varphi(X/A) + dC_\varphi(Y/A)$ si X et Y sont disjoints et de même rang, avec égalité si X et Y sont en plus des φ-ensembles.

Soit $\varphi(y, z)$ une formule, et soient X et Y deux ensembles définissables. Si g est une application définissable de X vers Y et si y et Y ont même arité, on note $g^{-1}\varphi(x, z)$ la formule $\varphi(g(x), z)$ c'est-à-dire la formule $(\exists y)(y = g(x) \wedge \varphi(y, z))$.

LEMME 2.4. *Si X et Y et g sont tous trois $dcl^{eq}(A)$-définissables, alors,*

(1) *si g est surjective, $RC_{g^{-1}\varphi}(X/A) \geqslant RC_\varphi(Y/A)$,*
(2) *si g est à fibres finies, $RC_{g^{-1}\varphi}(X/A) \leqslant RC_\varphi(Y/A)$,*
(3) *si g est surjective et si ses fibres n'ont pas plus de n éléments, alors $RC_{g^{-1}\varphi}(X/A)$ et $RC_\varphi(Y/A)$ sont égaux, et*

$$dC_\varphi(Y/A) \leqslant dC_{g^{-1}\varphi}(X/A) \leqslant n \cdot dC_\varphi(Y/A).$$

DÉMONSTRATION. Comme dans [9, Remark 1.9], il suffit de remarquer que l'application g induit une application continue et ouverte de $S^X_{g^{-1}\varphi}(dcl^{eq}(A))$ dans $S^Y_\varphi(dcl^{eq}(A))$. ⊣

PROPOSITION 2.5. *Soit M une structure fine, A un sous-ensemble fini de paramètres et E une relation d'équivalence définissable sur $dcl(A)^{eq}$. L'union disjointe de M et M/E est fine. Le langage considéré est celui de M augmenté d'un symbol de fonction π_E pour la surjection canonique de M dans M/E et d'un prédicat unaire interprétant M/E.*

DÉMONSTRATION. Dans ce nouveau langage, l'ensemble définissable M est encore fin. D'après le lemme 2.4.1, l'ensemble M/E l'est aussi. On conclut avec la remarque 2.3.1. ⊣

Remarquons enfin que rajouter un nombre fini de paramètres algébriques au langage n'affecte aucun φ-rang :

LEMME 2.6. *Soit X un ensemble définissable sans paramètres, et a un élément algébrique de degré n sur le vide. Alors, pour toute formule φ,*

(1) $RC_\varphi(X/\overline{a}) = RC_\varphi(X/\emptyset)$,
(2) $dC_\varphi(X/\emptyset) \leqslant dC_\varphi(X/\overline{a}) \leqslant n! \cdot dC_\varphi(X/\emptyset)$.

DÉMONSTRATION. Nous suivons [9, Remark 1.9]. On ne perd rien à supposer que X est la structure ambiante. On considère l'application restriction de $S_\varphi(dcl^{eq}(\overline{a}))$ dans $S_\varphi(dcl^{eq}(\emptyset))$ qui est continue et surjective, et on montre que ses fibres n'ont pas plus de $n!$ éléments. Soit $a_1, \dots, a_n$ la liste des conjugués de a sous l'action de $Aut(\mathfrak{C})$. Si x et y ont le même φ-type sur $dcl^{eq}(\emptyset)$ et si $\psi_1(x, a_1, \dots, a_n)$ est dans le φ-type de x sur $dcl^{eq}(\bar{a})$, alors $\overline{\psi}_1(x, a_1, \dots, a_n)$ est dans le φ-type de x (et de y) sur $dcl^{eq}(\emptyset)$ d'après le lemme 1. On en déduit que $\psi_1(x, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$ est dans le φ-type de y sur $dcl^{eq}(\overline{a})$ pour une certaine permutation σ des coordonnées $\{1, \dots, n\}$. Si l'on itère le raisonnement avec une deuxième formule ψ_2, en considérant la conjonction $\psi_1 \wedge \psi_2$, on voit que la permutation σ ne dépend pas de la formule choisie, d'où les $n!$ choix. On conclut avec la remarque 2.1 et [9, Lemma 1.10]. ⊣

Si X est un ensemble définissable sur un ensemble fini a, on appelle *φ-rang de Cantor local de X sur a* son φ-rang de Cantor sur n'importe quel ensemble fini b permettant de définir X et tel que $b \subset acl(a)$ et $a \subset acl(b)$.

§3. Généralités sur les groupes fins. Dans le langage des groupes, pour une formule $\varphi(x, y)$ et une nouvelle variable de paramètres z d'arité 1, on notera $z\varphi(x, y)$ ou simplement $z\varphi$ la formule $\varphi(z^{-1}x, y)$, ce qui est en accord avec la définition qui précède le lemme 2.4. De même, on écrira $\varphi z(x, y)$ la formule $\varphi(xz^{-1}, y)$.

COROLLAIRE 3.1. *Soit f un homomorphisme définissable d'un groupe fin G, dont le noyau ait au plus n éléments. S'il existe un uplet fini b de paramètres dans G tels que les images itérées de f soient uniformément définissables sur $dcl^{eq}(b)$, alors $f(G)$ est d'indice au plus n dans G.*

DÉMONSTRATION. Sinon, on peut trouver un uplet fini c contenant b ainsi que les représentants de $n+1$ classes modulo $f(G)$. Soit $\psi(x, y)$ une formule permettant de définir les images itérées de f. On considère la formule $\varphi(x; y, z) = z\psi(x, y)$. Soit m un entier tel que le rang $RC_\varphi(f^m(G))$ soit minimal. D'après le lemme 2.4, et par minimalité de m, on a

$$RC_{f^{-1}\varphi}(f^m(G)/c) = RC_\varphi(f^{m+1}(G)/c) = RC_\varphi(f^m(G)/c).$$

D'après le lemme 4, pour tout a dans c, les translatés $af^{m+1}(G)$ ont même φ-rang et degré de Cantor sur c, et puisque ce sont des φ-ensembles, d'après la remarque 2.3.2, on a

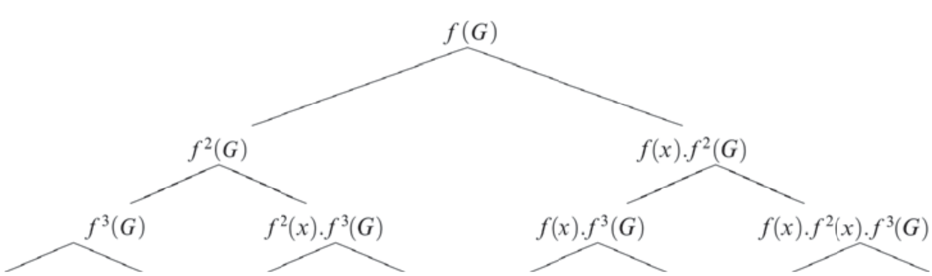
$$dC_\varphi(f^m(G)/c) \geqslant (n+1)dC_\varphi(f^{m+1}(G)/c),$$

ce qui contredit le lemme 2.4. ⊣

En fait, sans hypothèse sur le noyau mais en supposant la théorie fine, on a la chose suivante :

PROPOSITION 3.2. *Soit un groupe G dont la théorie est fine. Soit un uplet fini b de paramètres de G, un homomorphisme définissable f du groupe G dont les images itérées soient uniformément définissables sur $dcl^{eq}(b)$. Alors la chaîne des images itérées de f stationne, et il y a un entier n tel que G se décompose en le produit* $\mathrm{Im}(f^n)\cdot \mathrm{Ker}(f^n)$.

DÉMONSTRATION. Si la chaîne $f(G), f^2(G), \ldots$ décroît strictement, on considère $A(x)$ l'arbre binaire suivant :



Appelons $\pi(x)$ le type partiel $\{x \notin f^{-n}(f^{n+1}(G)) : n \geqslant 1\}$. La suite $f^{-1}f^2(G)$, $f^{-2}f^3(G), \ldots$ est croissante, et chaque $G \setminus f^{-n}f^{n+1}(G)$ est non vide par hypothèse, donc π est finiment consistant. Soit a une réalisation de π dans un modèle saturé. L'arbre $A(a)$ a $2^{\aleph_0}$ branches consistantes, donc si l'on note $\varphi(x; y, z)$ une formule définissant uniformément les ensembles $\{z.f^n(G) : n \geqslant 1\}$, l'ensemble $S_\varphi(dcl^{eq}(a, b))$ est de cardinal $2^{\aleph_0}$, une contradiction. Il y a donc un entier n tel que $f^n(G) = f^{2n}(G)$, et on en déduit $G = \mathrm{Im}(f^n)\cdot \mathrm{Ker}(f^n)$. ⊣

Lemme 3.3. *Soit G un groupe fin, $\varphi(x, y)$ une formule, et $H_2 \leqslant H_1$ deux sous-groupes de G qui soient définis par des φ-ensembles sur $dcl^{eq}(\emptyset)$.*

(1) *Si $H_2 \cap acl(\emptyset)$ est un sous-groupe propre de $H_1 \cap acl(\emptyset)$, alors soit $RC_{z\varphi}(H_2) < RC_{z\varphi}(H_1)$, soit $dC_{z\varphi}(H_2) < dC_{z\varphi}(H_1)$.*
(2) *Si H_1 et H_2 ont même $z\varphi$-rang de Cantor sur le vide, alors $H_2 \cap acl(\emptyset)$ est d'indice fini dans $H_1 \cap acl(\emptyset)$.*

Démonstration. Soit b un élément de $acl(\emptyset)$ dans $H_1 \setminus H_2$. L'ensemble $\overline{b.H_2}$ est un $z\varphi$-définissable sur $dcl^{eq}(\emptyset)$ d'après le lemme 1 et disjoint de H_2 donc soit le $z\varphi$-rang de Cantor de H_2 n'est pas maximal, soit son degré ne l'est pas. Supposons H_1 et H_2 de même $z\varphi$-rang de Cantor sur le vide. D'après les lemmes 2.6, 2.4 et la remarque 2.3, on a

$$RC_{z\varphi}(H_2) = RC_{z\varphi}(H_2/b) = RC_{z\varphi}(bH_2/b) = RC_{z\varphi}(\overline{b.H_2}/b) = RC_{z\varphi}(\overline{b.H_2}).$$

Le $z\varphi$-rang de Cantor de $\overline{b.H_2}$ sur le vide est maximal dans H_1, et il ne peut y avoir qu'un nombre fini de choix pour $\overline{b.H_2}$, et donc pour $b.H_2$. $\dashv$

Théorème 3.4 (Condition de chaîne uniforme et locale). *Dans un groupe fin, pour tout uplet fini b de paramètres de G, la trace sur $acl(b)$ d'une chaîne décroissante de sous-groupes définis par des φ-formules sur $acl(b)$ stationne après un nombre fini d'étapes.*

Démonstration. Soit $G_1 \geqslant G_2 \geqslant \dots$ une chaîne décroissante de sous-groupes définis par des φ-formules sur $acl(b)$. Appelons $\psi(x, y, z)$ la formule $z\varphi(x, y)$. Après un nombre fini d'étapes, le ψ-rang de Cantor local des G_i stationne d'après le lemme 2.6, donc on ne perd rien à supposer qu'il est constant dès le départ. On peut rajouter b et un nombre fini de paramètres algébriques sur b au langage et supposer que G_1 est définissable sans paramètres. L'indice de $G_i \cap acl(\emptyset)$ dans $G_1 \cap acl(\emptyset)$ est fini pour tout i d'après les lemmes 3.3 et 2.6. Pour tout i, l'ensemble $\mathring{G}_i \cap acl(\emptyset)$ est un φ-ensemble définissable sur $dcl^{eq}(\emptyset)$. L'intersection sur i des $\mathring{G}_i \cap acl(\emptyset)$ est l'intersection d'un nombre fini d'entre eux d'après le lemme 3.3 : c'est un sous-groupe de $G_0 \cap acl(\emptyset)$ d'indice fini, qui est inclus dans chacun des G_i. La suite des indices $[G_0 \cap acl(\emptyset) : G_i \cap acl(\emptyset)]$ est donc bornée, ce qui majore la longueur de la chaîne $G_1 \cap acl(\emptyset) \geqslant G_2 \cap acl(\emptyset) \geqslant \cdots$. $\dashv$

Illustrons ce théorème avec plusieurs conséquences :

Corollaire 3.5. *Soit G un groupe mince et Γ une clôture algébrique finiment engendrée dans G. Pour toute partie A de Γ il y a un ensemble fini $B \subset A$ tel que*

$$C_\Gamma(A) = C_\Gamma(B).$$

Corollaire 3.6. *Un groupe infini dont le centre est d'indice infini, et n'ayant qu'une seule classe de conjugaison non centrale n'est pas fin.*

Remarque 3.7. Cela généralise les cas stable [11, Théorème 3.10] et mince [9].

Démonstration. Le groupe n'a pas de second centre. Quitte à quotienter, on peut supposer que le centre est réduit au neutre. S'il y avait une autre involution que le neutre, tous les éléments seraient des involutions et le groupe serait abélien. A part le neutre, tout élément g est donc conjugué à g^{-1} par un élément h non trivial. L'élément h^2 est conjugué à h : il est égal à $k^{-1}hk$ pour un certain k de G. Soit Δ la clôture définissable de h et de k. Puisque g est dans $C(h^k)$ et que $gh \neq hg$, l'élément h est dans $(C(C(h)) \cap \Delta) \setminus (C(C(h^k)) \cap \Delta)$. On en déduit que la chaîne

$$C(C(h)) \cap \Delta > C(C(h^k)) \cap \Delta > C(C(h^{k^2})) \cap \Delta > \cdots$$

est infinie, une contradiction avec la condition de chaîne 3.4. ⊣

COROLLAIRE 3.8. *Dans un groupe fin G, soit Γ une clôture algébrique finiment engendrée et $a_1, a_2, \dots$ une suite d'uplets finis de Γ. Toute chaîne croissante de centralisateurs de la forme $C(a_1) \leqslant C(a_2) \leqslant \cdots$ stationne après un nombre fini d'étapes.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la chaîne $C(a_1) < C(a_2) < \cdots$ soit strictement croissante. Il existe une suite $x_1, x_2, \dots$ dans G^ω telle que x_i et a_{i+1} commutent, mais pas x_i et a_i, et ce quel que soit i. La chaîne $C_\Gamma(C(a_1)) > C_\Gamma(C(a_2)) > \cdots$ est donc strictement décroissante, contredisant le théorème 3.4. ⊣

DÉFINITION 3.9. Soit G un groupe fin, g un uplet fini de G, $\varphi(x, y)$ une formule, X un sous-ensemble g-définissable de G et Γ la clôture algébrique de g. On définit le *φ-presque stabilisateur local* de X dans Γ par

$$Stab_\Gamma^\varphi(X) = \big\{h \in \Gamma : RC_{z\varphi}\big(hX \triangle X/h, g\big) < RC_{z\varphi}\big(X/h, g\big)\big\},$$

où $A \triangle B$ désigne ici la *différence symétrique* $A \cup B \setminus A \cap B$.

Si Λ est un sous groupe de Γ, on pose $Stab_\Lambda^\varphi(X) = Stab_\Gamma^\varphi(X) \cap \Lambda$.

REMARQUE 3.10. Pour un sous-ensemble X du groupe fin G définissable sur le vide, on n'a pas nécessairement l'égalité des rangs $RC_{z\varphi}(X)$ et $RC_{\varphi z}(X)$. Cependant, si g est l'opération inverse, on a pour toute formule φ l'égalité $RC_{g^{-1}\varphi}(X) = RC_\varphi(X^{-1})$. En particulier, si X et φ sont symétriques (*i.e.* si G satisfait $(\forall x)(\forall y)\varphi(x^{-1}, y) \leftrightarrow \varphi(x, y)$, ou seulement $(\forall y)(\exists z)(\forall x)\varphi(x^{-1}, y) \leftrightarrow \varphi(x, z)$), on a $RC_{z\varphi}(X) = RC_{\varphi z}(X)$.

COROLLAIRE 3.11. *Si X n'est pas vide et si $(\exists y)\varphi(x, y)$ est consistante, il existe un élément g de G tel que pour toute clôture algébrique finiment engendrée Γ contenant g l'ensemble $Stab_\Gamma^\varphi(X)$ soit un sous-groupe de Γ. Si de plus X est invariant par conjugaison par Γ alors $Stab_\Gamma^\varphi(X)$ est distingué dans Γ.*

DÉMONSTRATION. Soient a et g dans G vérifiant $\varphi(a, g)$ et soit h dans X. On a $(ah^{-1})h = a$ donc X et $\varphi(ah^{-1}x, g)$ sont consistants et $RC_{z\varphi}(X/g) \geqslant 0$ d'où $1 \in Stab_\Gamma^\varphi(X)$ dès que Γ contient g. Soient a et b dans $Stab_\Gamma^\varphi(X)$. D'après le lemme 2.4 les ensembles X, aX et bX ont les mêmes $z\varphi$-types de rang maximal calculés sur les paramètres g, a, b donc

$$RC_{z\varphi}\big(aX \triangle bX/g, a, b\big) < RC_{z\varphi}(X/g).$$

Puisque le $z\varphi$-rang est préservé par ajout de paramètres algébriques, et par translation par un élément de $acl(\emptyset)$, on a

$$\begin{aligned} RC_{z\varphi}\big(aX \triangle bX/g, a, b\big) &= RC_{z\varphi}\big(b^{-1}aX \triangle X/g, a, b\big) \\ &= RC_{z\varphi}\big(b^{-1}aX \triangle X/g, b^{-1}a\big) \end{aligned}$$

donc $b^{-1}a$ est dans $Stab_\Gamma^\varphi(X)$. ⊣

Dans un groupe stable G, on peut définir le φ-stabilisateur $Stab^{\varphi}(X)$ d'un ensemble définissable X, et ce $Stab^{\varphi}(X)$ est d'indice fini pour peu que X soit générique. Dans un groupe menu, pour toute clôture définissable finiment engendrée Δ, il existe une notion de presque stabilisateur local $Stab_{\Delta}(X)$ d'un ensemble Δ-définissable X, tel que $Stab_{\Delta}(X)$ soit d'indice fini dans Δ dès que X est de rang de Cantor maximum sur Δ [9]. Dans un groupe fin :

Proposition 3.12. *Soit G un groupe fin, g un uplet fini de G, $\varphi(x, y)$ une formule, et X un sous-ensemble g-définissable de G. Si Δ est un sous-groupe de $dcl(g)$ et si X est de $z\varphi$-rang de Cantor maximal sur g, alors $Stab^{\varphi}_{\Delta}(X)$ est d'indice fini dans Δ.*

Démonstration. Soient m et ℓ les $z\varphi$-degrés de G, et X sur g. Il y a m $z\varphi$-types de rang sur g maximal dans G que nous appelons ses $z\varphi$-types *génériques*. Donc, pour un translaté de X par un élément de Δ, il y a au plus C^{ℓ}_{m} choix possibles pour ses $z\varphi$-types génériques. Si l'on choisit $C^{\ell}_{m} + 1$ translatés de X, on s'assure qu'au moins deux d'entre eux auront les mêmes $z\varphi$-types génériques. ⊣

§4. Corps fins.

Théorème 4.1. *Un corps infini (commutatif ou gauche) dont la théorie est fine n'a pas de sous-groupe propre définissable d'indice fini, ni additif, ni multiplicatif. Qui plus est, un corps fin n'a pas de sous-groupe propre définissable additif propre d'indice fini.*

Démonstration. Soit K ce corps et H un sous-groupe additif définissable de K d'indice fini dans K^{+}. Supposons tout d'abord que K ne soit pas localement fini. On considère alors une clôture algébrique infinie Γ finiment engendrée qui contient un représentant de chaque classe de H. La trace d'un translaté multiplicatif de H dans Γ est aussi d'indice fini dans Γ. La trace sur Γ de l'intersection des aH quand a parcourt Γ stationne. C'est un idéal de Γ d'indice fini qui est donc Γ tout entier. On vient de montrer $\Gamma \subset H$. Comme ceci est valable pour toute clôture Γ finiment engendrée, on a $H = K$.

Si K est localement fini, il est commutatif et égal à $acl(\emptyset)$. D'après la condition de chaîne 3.4, l'intersection des aH quand a parcourt K stationne et $H = K$.

Soit maintenant M un sous-groupe distingué de $K^{\times}$ d'indice fini. Si la théorie de K est fine, puisque K est infini, par compacité il y a des éléments d'ordre arbitrairement grand et on peut supposer que K n'est pas localement fini quitte à le remplacer par une extension élémentaire. Soit Δ un sous-corps infini finiment engendré contenant un représentant de chaque classe de M. Si $\varphi(x, y)$ désigne la formule définissant M, d'après la remarque 2.3 et le lemme 2.4, l'ensemble M est de $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$-rang maximal sur Δ. Puisque la formule $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$ est stable par addition, le $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$-presque stabilisateur additif dans Δ est d'indice fini dans Δ^{+} d'après la proposition 3.12. Puisque la formule $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$ est stable par multiplication, il en va de même pour le $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$-presque stabilisateur de chacune des classes de M. L'intersection de ces stabilisateurs est un idéal de Δ d'indice fini, c'est-à-dire Δ tout entier. Comme dans [12] nous venons de montrer

$$1 + aM \simeq_{\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)} aM$$

pour toute classe aM, où $\simeq_\psi$ désigne l'égalité à petit ψ-rang de Cantor sur Δ près. Pour toute classe aM et tout x dans aM sauf un ensemble de petit $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$-rang de Cantor local, $1 + x \in aM$, donc $x^{-1} + 1 \in M$. Puisque la formule $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$ est stable par inversion et addition, le complémentaire de M est de petit $\varphi\left(\frac{z_1+z_2x}{z_3+z_4x}, y\right)$-rang de Cantor sur Δ. On en déduit que $M = K^\times$. ⊣

THÉORÈME 4.2. *Un corps infini dont la théorie est fine n'a pas d'extension d'Artin-Schreier.*

DÉMONSTRATION. Soit K ce corps, et K^{par} le corps $\bigcap_{n\geqslant 1} K^{p^n}$, qui est parfait et que l'on peut supposer infini par compacité quitte à remplacer K par une extension élémentaire saturée. Soit k une clôture algébrique infinie finiment engendrée de K^{par}. Le corps k est lui aussi parfait. On considère l'application d'Artin-Schreier f, qui à un x de K associe $x^p - x$. D'après la condition de chaîne uniforme et locale 3.4, le groupe I défini par $\bigcap_{a\in k^\times} af(K) \cap k$ est égal à une intersection finie de la forme $\bigcap_{i=1}^n a_i f(K) \cap k$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont dans $k^\times$. Nous reprenons ensuite un argument de T. Scanlon [5, 14] : considérons k^{alg} la clôture algébrique de k, et le groupe algébrique linéaire $G(k^{alg})$ de $((k^{alg})^+)^{n+1}$ défini par les équations polynômiales $\bigwedge_{i=1}^n a_i(X_i^p - X_i) - X_{n+1} = 0$. Etant l'intersection de n hypersurfaces, $G(k^{alg})$ est de dimension au moins 1. Puisque k est parfait, d'après [5, Corollaire 2.6], la composante connexe de l'unité de $G(k^{alg})$ est isomorphe à $(k^{alg})^+$ au-dessus de k. Cet isomorphisme envoie $G(k)$ sur k^+. En particulier, $G(k)$ est infini. La projection de $G(k)$ sur la dernière coordonnée étant à fibres finies, on peut trouver un élément a non nul dans $\bigcap_{a\in k^\times} af(K) \cap k$. Mais $\bigcap_{a\in k^\times} af(K) \cap k$ est un idéal de k, donc égal à k tout entier, et $k \subset f(K)$. Ceci étant valable pour toute clôture algébrique finiment engendrée dans K^{par}, on a $K^{par} \subset f(K)$. Par compacité, il existe un n tel que $K^{p^n} \subset f(K)$. On en déduit sans peine que $f(K^{p^n}) = K^{p^n}$, puis que $f(K) = K$. ⊣

COROLLAIRE 4.3. *Soit K un corps infini de caractéristique $p > 0$ dont la théorie est fine, et L une extension séparable de K. Le degré de L/K n'est pas divisible par p.*

DÉMONSTRATION. Voir [5, Corollary 4.4]. ⊣

THÉORÈME 4.4. *Soit K un corps gauche fin de caractéristique $p > 0$. Pour tout uplet fini b de K, le sous-corps $acl(b)$ est de dimension finie sur son centre.*

DÉMONSTRATION. Soit a un élément hors du centre, b un élément ne commutant pas avec a, et f l'application qui à un x de K associe $a^{-1}xa - x$. On a $f^p(x) = a^{-p}xa^p - x$, de sorte que les puissances itérées de f sont uniformément définissables. Puisque les corps finis sont commutatifs, K n'est pas localement fini. Soit k une clôture algébrique (au sens de la théorie des modèles) infinie finiment engendrée de K contenant a et b. D'après le théorème 3.4, la chaîne $k \cap f^n(K)$ stationne à partir d'un certain rang m. On montre alors sans peine que

$$k \subset \mathrm{Ker}(f^m) + \mathrm{Im}(f^m). \tag{1}$$

D'après le corollaire 3.8, la chaîne de centralisateurs $C(a^{p^i})$ stationne, donc celles des noyaux itérés de f également : quitte à augmenter m, on peut supposer que $\mathrm{Ker}(f^m)$ et $\mathrm{Im}(f^m)$ sont en somme directe. Pour tout x dans k, il existe un unique y dans $\mathrm{Ker}(f^m)$ et z dans $\mathrm{Im}(f^m)$ tels que $x = y + z$ d'après (1). Les éléments y

et z sont donc dans $dcl(x,a)$, lequel est inclus dans k. On en déduit que

$$k = \mathrm{Ker}(f^m) \cap k \oplus \mathrm{Im}(f^m) \cap k.$$

Soit I l'intersection $\bigcap_{a \in k^\times} a.\mathrm{Im}(f^m) \cap k$. Puisque la suite des dimensions des noyaux itérés d'un endomorphisme s'essouffle, $\mathrm{Ker}(f^m)$ est de dimension finie (au plus m) sur $C(a)$. D'après le théorème 3.4, l'ensemble I est une intersection finie de sous-espaces vectoriels sur le corps $C_k(a)$ qui sont chacun de codimension finie sur $C_k(a)$. Mais I est aussi un idéal à gauche qui ne contient pas 1. Il est donc nul, ce qui montre que la dimension de k sur $C_k(a)$ est finie. Comme c'est valable pour n'importe quel a de k et que le centre de k est l'intersection d'un nombre fini de centralisateurs par 3.4, k est de dimension finie sur son centre. $\dashv$

Un corps stable de caractéristique positive est de dimension finie sur son centre [7]. On peut préciser ce résultat :

Fait 4.5 (J. Baldwin et J. Saxl [2, 11]). *Dans un groupe sans propriété d'indépendance, soit H_1, $H_2, H_3 \ldots$ des sous-groupes uniformément définissables. Il existe un entier naturel n tel que toute intersection d'un nombre fini de groupes H_i soit égale à l'intersection d'au plus n d'entre eux.*

Corollaire 4.6. *Un corps fin de caractéristique positive sans propriété d'indépendance est de dimension finie sur son centre.*

Démonstration du corollaire 4.6. Il suffit de remarquer dans la démonstration précédente que toutes les intersections de groupes uniformément définissables sont des intersections bornées uniformément et indépendamment de k d'après le fait 4.5. En particulier, il existe un entier n tel que pour tout uplet b fini, la dimension de $acl(b)$ sur son centre soit au plus n. On en déduit que le corps est de dimension au plus n sur son centre. $\dashv$

§5. **Remerciements.** Merci à B. Poizat pour ses commentaires éclairants, au referee pour sa lecture attentive, ses corrections et améliorations.

RÉFÉRENCES

[1] Chantal Berline and Daniel Lascar, *Superstable groups*. ***Annals of Pure and Applied Logic***, vol. 30 (1986), pp. 1–43.

[2] John Baldwin and Jan Saxl, *Logical stability in group theory*. ***Journal of the Australian Mathematical Society***, vol. 21 (1976), pp. 267–276.

[3] Gregory Cherlin and Saharon Shelah, *Superstable fields and groups*. ***Annals of Mathematical Logic***, vol. 18 (1980), pp. 227–270.

[4] Ehud Hrushovski, ***Contributions to stable model theory***, Ph.D. thesis, Berkeley, 1986.

[5] Itay Kaplan, Thomas Scanlon, and Frank O. Wagner, *Artin-Schreier extensions in dependent and simple fields*. ***Israel Journal of Mathematics***, vol. 185 (2011), pp. 141–153.

[6] Cédric Milliet, *Small skew fields*. ***Mathematical Logic Quarterly***, vol. 53 (2007), pp. 86–90.

[7] ———, *Stable division rings*, this Journal, vol. 76 (2011), pp. 348–352.

[8] ———, *On enveloping type-definable structures*, this Journal, vol. 76 (2011), pp. 1023–1034.

[9] ———, *On properties of (wealkly) small groups*, this Journal , vol. 77 (2012), pp. 94–110.

[10] ———, *Fields and rings with few types*, this Journal , vol. 78 (2013), pp. 72–84.

[11] Bruno Poizat, ***Groupes stables***, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[12] ———, *Quelques tentatives de définir une notion générale de groupes et de corps de dimension un et de déterminer leurs propriétés algébriques*. ***Confluentes Mathematici***, vol. 1 (2009), pp. 111–122.

[13] Bruno Poizat and Frank O. Wagner, *Sous-groupes périodiques d'un groupe stable*, this Journal, vol. 58 (1993), pp. 385–400.

[14] Thomas Scanlon, *Infinite stable fields are Artin-Schreier closed*, math.berkeley.edu/~scanlon/papers/ASclos.pdf, non publié, 1999.

[15] Frank O. Wagner, *Small stable groups and generics*, this Journal, vol. 56 (1991), pp. 1036–1037.

[16] ———, *Quasi-endomorphisms in small stable groups*, this Journal, vol. 58 (1993), pp. 1044–1051.

[17] ———, *Small fields*, this Journal, vol. 63 (1998), pp. 995–1002.

[18] Carol Wood, *Notes on stability of separably closed fields*, this Journal, vol. 44 (1979), pp. 337–352.

GALATASARAY ÜNIVERSITESI
FEN EDEBIYAT FAKÜLTESI
MATEMATIK BÖLÜMÜ
ÇIRAĞAN CADDESI N. 36
34357 ORTAKÖY, İSTANBUL, TURKEY

(Current address) UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH MATEMATIK UND STATISTIK
78457 KONSTANZ, GERMANY
E-mail: cedric.milliet@uni-konstanz.de