Topologie des espaces vectoriels normés

Cédric Milliet

Version préliminaire

Cours de troisième année de licence

Université Galatasaray

Année 2011-2012

Chapitre 1

$\mathbb{R}$-Espaces vectoriels normés

1.1 Vocabulaire de base

Définition 1 (*norme*)

*E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *$N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0_E$. (séparation)*
2. *Pour tout (x, λ) dans $E \times \mathbb{R}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. (homogénéité)*
3. *Pour tout (x, y) dans E^2, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$. (inégalité triangulaire)*

Notation usuelle. $N(x) = \| x \|$

Nota bene. Pour tout (x, y) dans E^2, on a $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Définition 2 (*espace vectoriel normé*)

*Tout couple (E, N) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N une norme sur E s'appelle un **$\mathbb{R}$-espace vectoriel normé**.*

Définition 3 (*normes équivalentes*)

*Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** si*

$$\Big(\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2\Big)\Big(\forall x \in E\Big)\ N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Nota bene. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Proposition-définition 4 (*distance associée à une norme*)

*Soit $(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On appelle **distance associée** à la norme $\| \|$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \| x - y \| \end{array}$$

Définition 5 (*distance*)

*Soit ε un ensemble. On appelle **distance sur** ε toute application d de $\varepsilon \times \varepsilon$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *pour tout (x, y) dans ε^2, on ait $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$. (séparation)*
2. *pour tout (x, y) dans ε^2, on ait $d(x, y) = d(y, x)$. (symétrie)*
3. *pour tout (x, y, z) dans ε^3, on ait $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (inégalité triangulaire)*

Définition 6 (*espace métrique*)

*On appelle **espace métrique** tout couple (ε, d) où d est une distance sur ε.*

Proposition-définition 7 (*norme induite*)

Soit $(E \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E. La restriction de $\| \|$ à F définit *une norme sur F, appelée* ***norme induite sur F par*** $\| \ \|$, *et notée* $\| \ \|_F$ *(ou abusivement* $\| \ \|$*).*

$$\| \ \|_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \| x \| \end{array}$$

Proposition-définition 8 (*norme sur un produit fini de ℝ-espaces vectoriels normés*)

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$ *des* ℝ*-espaces vectoriels normés, et soit* E *le produit cartésien* $E_1 \times \cdots \times E_n$. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sup\limits_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array}$$

est une norme sur E *notée* ν_∞. *Ainsi,* (E, ν_∞) *est un* ℝ*-espace vectoriel normé.*

Nota bene. On peut définir sur E d'autres normes équivalentes à ν_∞ :

la norme $\nu_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)$ et la norme $\nu_2 : x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} N_i(x_i)^2}$.

Définition 9 (*algèbre normée*)

Soit E *une* ℝ*-algèbre munie d'une norme* $\| \ \|$. *(On rappelle qu'une* ℝ*-algèbre est un anneau qui est aussi un* ℝ*-espace vectoriel). On dit que* $(E, \| \ \|)$ *est une* ***ℝ-algèbre normée*** *si cette norme est "multiplicative", c'est-à-dire si pour tout* x *et* y *dans* E*, on a*

$$\| x.y \| \leq \| x \| \, . \, \| y \|$$

E *est une* ℝ*-algèbre normée* ***unitaire*** *si de plus* $\| 1_E \| = 1$.

1.2 Exemples de ℝ-espaces vectoriels normés

1. $\underline{E = \mathbb{R}}$ avec la norme usuelle $|x|$.
2. $\underline{E = \mathbb{R}^n}$. Si x est dans E, on pose $x = (x_1, \dots, x_n)$.
   (a) $\| x \|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
   (b) $\| x \|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
   (c) $\| x \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$
3. $\underline{E = M_n(\mathbb{R})}$. Si A est dans E, on pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
   (a) $\| A \|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$
   (b) $\| A \|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
   (c) $\| A \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$
4. $\underline{E = \mathbb{R}[X]}$. Si P est dans E, on pose $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   (a) $\| P \|_\infty = \sup\limits_{0 \leq k \leq n} |a_k|$
   (b) $\| P \|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \|a_k|$
   (c) $\| P \|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|^2}$

(d) $N_{a,b}(P) = \sup_{x\in[a,b]} |P(x)|$ et $N_1(P) = \int_a^b |P(t)|dt$ où a et b sont deux réels fixés (avec $a < b$).

5. $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ où a et b sont deux réels (avec $a < b$). Soit f dans E.
   (a) $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
   (b) $\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$
   (c) $\| f \|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$
6. $E = \mathcal{B}(A,F)$ où A est un ensemble non vide et $(F, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 10 (*fonction bornée*)

Une fonction $f : A \mapsto F$ est dite ***bornée sur*** *A si l'ensemble $\{\| f(x) \|, \ x \in A\}$ est majoré. On note $\mathcal{B}(A,F)$ l'ensemble des fonctions bornées sur A à valeurs dans F.*

Proposition 11

$\mathcal{B}(A,F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et l'application $\| \ \|_\infty$ définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(A,F) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \| f \|_\infty = \sup_{x\in A} \| f(x) \| \end{array}$$

est une norme sur $\mathcal{B}(A,F)$.

Un cas particulier usuel :

$A = \mathbb{N}$ et $F = \mathbb{R}$. Dans ce cas, $(\mathcal{B}(A,F), \| \ \|_\infty)$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé des suites bornées à valeurs réelles. On le note $\ell^\infty(\mathbb{R})$. Si u désigne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\| u \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \| u_n \|$.

7. $E = \ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$. (désigne l'espace des suites réelles dont la série est absolument convergente)

Proposition 12

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application notée $\| \ \|_1$ qui à un élément u de E associe $\sum_{i\in\mathbb{N}} |u_i|$ est une norme sur E.

8. $E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. (désigne l'espace des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de "carré sommable", c'est-à-dire telles que la série de terme générale $(|u_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente)

Proposition 13

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et l'application notée $\| \ \|_2$ qui à un élément u de E associe $\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{N}} |u_i|^2}$ est une norme sur E.

Exercice. Montrer que toutes ces applications sont des normes, et les comparer.

1.3 Notions métriques

1.3.1 Boules

Définition 14 (*boules, sphère*)

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, a un élément de E, et $r > 0$. On appelle

1. ***Boule ouverte de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E : \| x - a \| < r\}$*
2. ***Boule fermée de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $B'(a,r) = \{x \in E : \| x - a \| \leq r\}$*
3. ***Sphère de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E : \| x - a \| = r\}$*

Proposition 15

Une boule (ouverte ou fermée) d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est convexe.

Définition 16 (*partie convexe d'un* ℝ*-evn*)

Une partie A d'un ℝ*-espace vectoriel normé est* **convexe** *si on a*

$$\left(\forall (x,y) \in A^2\right)\left(\forall \lambda \in [0,1]\right)\ \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

1.3.2 Problèmes de distance

Définition 17 (*distance à une partie*)

Soit $(E, \|\ \|)$ un ℝ*-espace vectoriel normé, A une partie de E non vide et x dans E. On appelle* **distance de** *A* **à** *x le réel noté $d(A,x)$ défini par :*

$$d(A,x) = \inf_{a\in A} d(a,x) = \inf_{a\in A} \| a - x \|$$

Nota bene.

1. C'est une borne inférieure, donc pas toujours atteinte ! Notamment, $d(A,x) = 0$ n'entraîne pas forcément $x \in A$.
2. On a $d(\{a\},x) = d(a,x) = \| x - a \|$

Proposition 18

A est une partie non vide de E. L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à x associe $d(A,x)$ est 1-lipshitzienne (donc continue...). Cela veut dire que pour tout x, x' de E, elle vérifie

$$\left|d(A,x) - d(A,x')\right| \leq d(x,x')$$

Définition 19 (*distance entre deux parties*)

Soient $(E, \|\ \|)$ un ℝ*-espace vectoriel normé, A et B deux parties de E non vides. On appelle* **distance de** *A* **à** *B le réel $d(A,B)$ défini par*

$$d(A,B) = \inf_{\substack{b\in B\\ a\in A}} \| a - b \| = \inf_{\substack{b\in B\\ a\in A}} d(a,b)$$

Nota bene.

1. C'est "cohérent" avec les définitions précédentes : $d(A,\{x\}) = d(A,x)$.
2. là encore, $d(A,B)$ est une borne inférieure, donc pas forcément atteinte. En particulier, $d(A,B) = 0$ n'implique pas $A \cap B \neq \emptyset$.

Définition 20 (*partie bornée, diamètre*)

A est une partie non vide de $(E, \|\ \|)$. Si l'ensemble $\{\| x - y \| : (x,y) \in A^2\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, on dit que A est **bornée***. On définit alors le* **diamètre** *$\delta(A)$ de A en posant*

$$\delta(A) = \sup\{\| x - y \| : (x,y) \in A^2\}$$

Proposition 21

Une boule (ouverte ou fermée) d'un ℝ*-espace vectoriel normé est bornée et son diamètre vaut deux fois son rayon.*

1.4 Notions topologiques

1.4.1 Voisinage d'un point

Définition 22 (*voisinage*)

$(E, \|\ \|)$ est un ℝ*-espace vectoriel normé, a un élément de E. On appelle* **voisinage de** *a* **dans** *E toute partie de E contenant une boule ouverte de centre a.*

Notation. $\mathcal{V}(a)$ désignera l'ensemble des voisinages de a dans E.

Propriétés 23

1. *Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.*
2. *Toute* ***réunion quelconque*** *de voisinages de a est un voisinage de a.*
3. *Une* ***intersection finie*** *de voisinage de a est un voisinage de a.*

Attention. L'intersection $\bigcap_{n\geq 1} B(a, \frac{1}{n})$ est égale à $\{a\}$.

1.4.2 ouverts, fermés

Définition 24 (*ouvert*)

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Une partie $\mathcal{O}$ de E est un **ouvert de** *E si $\mathcal{O}$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire si*

$$(\forall x \in \mathcal{O})(\exists r_x > 0) B(x, r_x) \subset \mathcal{O}$$

Définition 25 (*fermé*)

$\mathcal{F}$ est une partie de E. $\mathcal{F}$ est un **fermé de** *E si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ dans E est un ouvert de E, c'est-à-dire si*

$$(\forall x \notin \mathcal{F})(\exists r_x > 0) B(x, r_x) \cap \mathcal{F} = \emptyset$$

Exemple. E et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de E.

Proposition 26

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. *Toute boule ouverte est un ouvert de E.*
2. *Toute boule fermée est un fermé de E. (un singleton est un fermé de E)*
3. *Toute sphère est un fermé de E.*

Propriétés 27 (*stabilité*)

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. *La réunion quelconque d'une famille d'ouverts de E est un ouvert de E.*
2. *L'intersection finie d'une famille d'ouverts de E est un ouvert de E.*
3. *La réunion finie d'une famille de fermés de E est un fermé de E.*
4. *L'intersection quelconque d'une famille de fermés de E est un fermé de E.*

1.4.3 Intérieur, adhérence

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 28 (*intérieur*)

Soit A une partie de E. La réunion des ouverts de E inclus dans A est un ouvert de E inclus dans A. C'est le plus "gros" ouvert de E inclus dans A. On l'appelle **intérieur** *de A.*

Notation. On note $\mathring{A}$ l'intérieur de A. On a $\mathring{A} \subset A$.

Proposition-définition 29

Un point a est dit **intérieur à** *A si $a \in \mathring{A}$, c'est-à-dire si*

$$(\exists r > 0) \ B(a, r) \subset A$$

Nota bene. A est un ouvert de E si et seulement si $A = \mathring{A}$

Définition 30 (*adhérence*)

*Soit A une partie de E. L'intersection des fermés de E qui contiennent A est un fermé de E qui contient A. C'est le plus "petit" fermé de E qui contient A. On l'appelle **adhérence** de A.*

Notation. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A. On a $A \subset \bar{A}$.

Proposition-définition 31

*Un point a est dit **adhérent à** A si $a \in \bar{A}$ c'est-à-dire si toute boule ouverte de centre a rencontre A.*

Nota bene. A est un fermé de E si et seulement si $A = \bar{A}$.

Exemple. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, donner l'intérieur et l'adhérence de $]a, b]$, $[a, b]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Propriétés 32 (*stabilité*)

A et B sont deux parties d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. $\begin{cases} \text{Si } A \subset B, \text{ alors } \mathring{A} \subset \mathring{B} \\ \text{Si } A \subset B, \text{ alors } \bar{A} \subset \bar{B} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \\ \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$
4. $\begin{cases} E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} \\ E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A} \end{cases}$

Proposition 33 (*Intérieur et adhérence des boules*)

Soit a dans E, et $r > 0$. Alors

1. $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$
2. $\overset{\circ}{\widehat{B'(a, r)}} = B(a, r)$

Proposition-définition 34 (*frontière*)

*On appelle **frontière de** A notée $Fr(A)$ le fermé $\bar{A} \cap \overline{E \setminus A} = \bar{A} \setminus \mathring{A}$. Un **point frontière de** A est un point de $Fr(A)$.*

Exemple. Dans $(\mathbb{R}, |\ |)$, déterminer la frontière de $\mathbb{Q}$, de $]a, b]$ etc.

Partie dense dans E (important)

Définition 35 (*partie dense*)

*Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On dit que A est **dense dans** E si $\bar{A} = E$ c'est-à-dire si A rencontre tout ouvert non vide de E.*

Exemple. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1.4.4 Topologie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé

Définition 36 (*topologie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé*)

*Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On appelle **topologie de** E l'ensemble des ouverts de E.*

Définition 37 (*topologie, espace topologique*)

ε est un ensemble. On appelle topologie de ε un sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $P(\varepsilon)$ vérifiant les trois propriétés :

1. *$\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque,*
2. *$\mathcal{O}$ est stable par intersection finie,*
3. *$\emptyset$ et ε appartiennent à $\mathcal{O}$.*

*On appelle le couple $(\varepsilon, \mathcal{O})$ un **espace topologique**.*

Définition 38 (*ouvert d'un espace topologique*)

*Soit un espace topologique $(\varepsilon, \mathcal{O})$. On appelle **ouvert de** ε tout élément de $\mathcal{O}$.*

Nota bene. 1. Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est donc un espace toplogique.

2. Un espace métrique (ε, d) est aussi un espace topologique.

Proposition 39 (*deux normes équivalentes définissent la même topologie*)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ deux normes sur E équivalentes. Alors ces deux normes définissent la même topologie sur E (ie définissent la même notion d'ouvert de E).

Proposition 40 (*topologie produit*)

Soit $(E, N_1), \ldots, (E, N_n)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, et soit E le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de la norme infinie ν_∞. Soit A une partie de E. L'ensemble A est un ouvert de (E, ν_∞) si et seulement si pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de A, il existe des ouverts $\mathcal{O}_i$ de (E_i, N_i) tels que $a_i \in \mathcal{O}_i$ pour tout i, et $\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n \subset A$.

1.4.5 Distance induite sur une partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Topologie induite.

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E. On ne peut pas restreindre la norme $\| \ \|$ à A car A n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Mais on peut restreindre la distance d à $A \times A$ et l'on conserve une distance.

Définition 41 (*distance induite*)

*On appelle **distance induite sur** A la distance $\tilde{d}$ de $A \times A$ vers $\mathbb{R}^+$ définie pour tout (x, y) de $A \times A$ par $\tilde{d}(x, y) = d(x, y)$.*

Nota bene. 1. donc $(A, \tilde{d})$ est un espace métrique et l'on peut y définir les notions de **boules de** A, **ouvert de** A, **fermé de** A, intérieur, adhérence (relatifs) à A, topologie de A etc. On note $\tilde{B}(a, r)$ une boule ouverte de A (pour $a \in A$, et $r > 0$). On a

$$\tilde{B}(a, r) = \{x \in A : \tilde{d}(x, a) < r\} = B(a, r) \cap A$$

2. Ne pas confondre boule ouverte de E incluse dans A, et boule ouverte de A.
3. $\tilde{B}(a, r)$ est bornée, mais son diamètre n'est pas forcément $2r$. Elle n'a aucune raison d'être connexe.

Topologie induite sur A

$(A, \tilde{d})$ étant un espace métrique, possède une topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ (appelée **topologie induite sur** A), c'est-à-dire une notion d'**ouvert de** A, puis de **fermé de** A, d'adhérence, d'intérieur relatif (dans A), de **voisinage dans** A. La proposition suivante précise le lien entre la topologie induite $\tilde{\mathcal{T}}$ et la topologie $\mathcal{T}$ de E.

Proposition 42 (*topologie induite*)

1. *les ouverts de A (pour $\tilde{\mathcal{T}}$) sont les $O \cap A$ (où O est un ouvert de E).*
2. *les fermés de A (pour $\tilde{\mathcal{T}}$) sont les $F \cap A$ (où F est un ouvert de E).*
3. *les voisinages de a dans A (pour $a \in A$) sont les $V \cap A$ (où V est un voisinage de a dans E).*

Nota bene. Etre prudent, précis, lorsque l'on manipule ces notions.

Exemple. Dans $(\mathbb{R}, | \ |)$, avec $A =]0, 1] \cup \{2\}$.

1. A est un ouvert de A.
2. $\{2\}$ est un ouvert de A (et aussi un fermé de A). On a $\{2\} = A \cap B(2, 1/2)$.
3. $]0, 1]$ est un ouvert de A (et aussi un fermé de A).

Chapitre 2

Suites

2.1 Définitions

Définition 43 (*suite à valeur dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé*)

*Soit ε un ensemble. On appelle **suite d'éléments de** ε toute application de $\mathbb{N}$ dans ε.*

Définition 44 (*suite-extraite*)

*Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de ε. On appelle **suite extraite** (ou **sous-suite**) **de la suite** $(u_n)_{n\geq 0}$ toute suite $(v_n)_{n\geq 0}$ où $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout entier n, avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.*

Définition 45 (*suite convergente*)

*Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et l dans E. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de $E^{\mathbb{N}}$ **converge vers** l si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\epsilon) \implies \| u_n - l \| \leq \epsilon)$$

c'est-à-dire si

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \| u_n - l \| = 0}$$

Notation. On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Ca n'est qu'une notation !

Nota bene.
1. On calcule tout simplement une limite de réels positifs.
2. Notion stable par changement de normes équivalentes.

Proposition 46

Il y a équivalence entre
1. *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.*
2. *$(\forall r > 0)(\exists n_0(r) \in \mathbb{B})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0(r) \implies u_n \in B(l, r))$*
3. *Pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : u_n \notin B(l, r)\}$ est fini.*

Proposition 47

*Si l existe, l est unique. On l'appelle la **limite** de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*

Proposition 48

Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Soit $X^n = (x_1^n, \ldots, x_p^n)$ une suite d'éléments de (E, ν_∞) où E désigne le produit $E_1 \times \cdots \times E_p$. La suite $(X^n)_{n\geq 0}$ converge vers $l = (l_1, \ldots, l_p)$ si et seulement si pour tout i de $\{1, \ldots, p\}$ la suite $(x_i^n)_{n\geq 0}$ converge vers l_i.

2.2 Relations de comparaison entre suites

Définition 49 (*domination*)

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est

dominée par la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *si*

$$(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\ \ \| u_n \|\leq M \mid \alpha_n \mid$$

Notation. On note $u_n = O(\alpha_n)$.

Définition 50 (*négligeabilité*)

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ si

$$(\forall\epsilon>0)(\exists n_0(\epsilon)\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n\geq n_0(\epsilon)\implies \| u_n \|\leq \epsilon \mid \alpha_n \mid$$

Notation. On note $u_n = o(\alpha_n)$.

Nota bene. 1. la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$.

2. la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 si et seulement si $u_n = o(1)$.

Proposition-définition 51 (*équivalence*)

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$. On dit que ces suites sont équivalentes si

$$u_n - v_n = o(\| u_n \|)$$

Notation. On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Nota bene. 1. Pas de quotient u_n/v_n ici !

2. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l et si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ tend ausis vers l.

2.3 Valeurs d'adhérence

Proposition-définition 52

$(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$. On dit que a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ si l'une des propositions équivalences suivantes est vérifiée :

1. *a est limite d'une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.*
2. *Pour tout $r>0$, l'ensemble $\{n\in\mathbb{N} : u_n\in B(a,r)\}$ est infini.*
3. *$(\forall r>0)(\forall n\in\mathbb{N})(\exists n_0\geq n)\ u_{n_0}\in B(a,r)$*
4. *$a\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{u_p : p\geq n\}}$*

Nota bene. 1. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est donc un fermé de E.

2. SI une suite tend vers a, elle a une seule valeur d'adhérence : a. (réciproque fausse)

2.4 Caractérisation des fermés, de la borne supérieuer, inférieure

Proposition 53

$(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A une partie de E, et a dans E. L'élément a est dans l'adhérence de A si et seulement si a est limite d'une suite de points de A.

Proposition 54

A est un fermé de E si et seulement si toute suite d'éléments de A convergente (dans E) a sa limite dans A.

Proposition 55 (*Caractérisation de la borne supérieure, inférieure dans* $\mathbb{R}$)

Si A partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée.

$$M = supA \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de} A \\ M \in \overline{A} \text{ (ie } M = \lim_{n\to+\infty} a_n \text{ avec } a_n \in A) \end{cases}$$

Si B partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée.

$$m = supB \iff \begin{cases} m \text{ est un majorant de} B \\ m \in \overline{B} \text{ (ie } m = \lim_{n\to+\infty} b_n \text{ avec } b_n \in B) \end{cases}$$

2.5 Suites de Cauchy. Espaces de Banach. Parties complètes

2.5.1 Suites de Cauchy

Définition 56 (*suite de Cauchy*)

*$(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $E^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **de Cauchy** si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2)\ n \geq n_0(\epsilon) \text{ et } p \geq n_0(\epsilon) \implies \| u_n - u_p \| \leq \epsilon$$

Nota bene. Notion stable par changement de normes équivalentes.

Proposition 57

1. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
2. *Une suite convergente est de Cauchy.*
3. *Une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.*

2.5.2 Banach. Parties complètes.

Définition 58 (*espace de Banach*)

*$(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. E est un **Banach** si toute suite de Cauchy de E est convergente (dans E).*

Exemple. $(\mathbb{R}, | \ |)$ est un Banach.

Définition 59 (*partie complète*)

*$(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A est une partie de E. A est une partie **complète** de E si toute suite de Cauchy de points de A est convergente dans A.*

Propriétés 60

1. *Une partie complète d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E est un fermé de E.*
2. *$(E, \| \ \|)$ est un Banach. Une partie A de E est complète si et seulement si A est un fermé de E.*
3. *N_1, N_2 deux normes sur E équivalentes. (E, N_1) est un Banach si et seulement si (E, N_2) l'est.*

Proposition 61 (*produit cartésien de Banach*)

$(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des Banach. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme ν_∞ (ou ν_1, ν_2) est un Banach.

Corollaire 62

$(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ sont des Banach.

2.5.3 Exemple fondamental

Soit A un ensemble quelconque non vide (en pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$) et $(F, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On considère $\mathcal{B}(A, F)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de A dans F qui sont bornées sur A. Pour f dans $\mathcal{B}(A, F)$, on note $\| f \|_\infty = \sup_{x\in A} \| f(x) \|$. C'est une norme sur $\mathcal{B}(A, F)$.

Définition 63 (*convergence uniforme d'une suite de fonctions*)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathcal{B}(A, F)$ et f dans $\mathcal{B}(A, F)$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$

converge vers f ***uniformément sur*** A *si* $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ *dans* $(\mathcal{B}(A, F), \| \ \|_\infty)$*, c'est à dire si*

$$\| f_n - f \|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Proposition 64

Si $(F, \| \ \|)$ *est complet, alors* $(\mathcal{B}(A, F), \| \ \|_\infty)$ *est complet.*

Exemple. Si $A = \mathbb{N}$, alors $\mathcal{B}(\mathbb{N}, F) = \ell^\infty(F)$. L'espace $(\ell^\infty(F), \| \ \|_\infty)$ est complet ($\| u \|_\infty = \sup_{n \geq 0} | u_n |$).

Chapitre 3

Applications continues. Applications linéaires continues

3.1 Limite d'une application

Définition 65 (*limite d'une application*)

*$(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A est une partie non vide de E, a un élément de $\bar{A}$, b de F et f une application de A dans F. On dit que f **tend vers** b **quand** x **tend vers** a **suivant** A si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon) > 0)(\forall x \in A \cap B(a, \alpha))\ f(x) \in B(b, \epsilon)$$

ou encore si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon) > 0)(\forall x \in A)\ \ \| x - a \|_E \leq \alpha \implies \| f(x) - b \|_F \leq \epsilon$$

On note alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Remarque. 1. f n'est pas forcément définie au point a.

2. Notion stable par changement de normes équivalentes dans E ou F.

Proposition 66

1. *(unicité) La limite lorsqu'elle existe est unique.*
2. *(produit) Si $F = E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de la norme infinie ν_∞ si $(b_1, \ldots, b_p)$ est dans F et si f associe à tout x de E le vecteur $(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ de F, alors*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = (b_1, \ldots, b_n) \iff (\forall i \in \{1, \ldots, p\})\ \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_i(x) = b_i$$

3. *(composition) $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ et $(G, \|\ \|_G)$ sont trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, a dans $\bar{A}$, B une partie non vide de F, b dans $\bar{B}$, c dans G, f une application de A dans F et g une application de B dans G avec $f(A) \subset B$. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ et $\lim\limits_{\substack{y \to b \\ x \in B}} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g \circ f(x)$ existe et vaut c.*

Proposition 67 (*aspect séquentiel*)

f est une application de A dans F, a est dans $\bar{A}$ et b dans F. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers b.

3.2 Relations de comparaison en un point

3.3 Continuité

3.3.1 Continuité en un point a

Définition 68 (*continuité*)

$(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A est une partie non vide de E, a un élément de A, f de A dans F. n dit que f est continue au point ssi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$$

ie si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon))(\forall x \in A) \ \ \| x - a \|_E \leq \alpha(\epsilon) \implies \| f(x) - f(a) \|_F \leq \epsilon$$

Nota bene.

1. Notion stable par changement de normes équivalentes (dans E ou F).
2. Si $a \in \bar{A} \setminus A$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe et vaut b, on peut prolonger f par continuité à $A \cup \{a\}$ en posant $f(a) = b$.

Proposition 69 (*composition*)

Soient $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, a dans A, B une partie non vide de F, b dans B, f de A dans F et g de B dans G avec $f(A) \subset B$ et $f(a) = b$. Si f est continue en a et g est continue en b, alors $g \circ f$ est continue au point a.

Proposition 70 (*aspect séquentiel*)

Soit f de A dans F, a dans A. f est continue au point a ssi pour toute suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Nota bene. Faute d'idée pour établir une continuité en un point, penser à utiliser les suites.

3.3.2 Continuité "globale"

Dans ce paragraphe, $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E.

Définition 71 (*application continue*)

Une application f de A dans F est **continue sur** *A si f est continue en tout point de A.*

Propriétés 72 (*stabilité*)

1. *(restriction) si f est continue sur A, f est continue sur tout $A' \subset A$.*
2. *(opérations) On note $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des applications de A vers F continues sur A. $\mathcal{C}(A, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.*
3. *(composition) soit $(G, \| \|_G)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, B une partie non vide de F, f de A dans F continue sur A et g de B dans G continue sur B avec $f(A) \subset B$. Alors $g \circ f$ est continue sur A.*
4. *(fonctions à valeurs dans un espace produit) si $F = E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme infinie, et f de A dans F qui à x associe $(f_1(x), \ldots, f_p(x))$. Alors f est continue sur A si et seulement si chaque f_i est continue sur A.*

Exemples.

1. (important) Toute fonction polynômiale de $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
2.
3.

Proposition 73 (*caractérisation*)

Soit f de A dans F. Il y a équivalence entre :

1. *f est continue sur A.*
2. *L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un* **ouvert de** *A.*

3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un ***fermé de*** *A.*

Remarque. La proposition est un bon moyen pour montrer qu'une partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E est un ouvert (ou un fermé) de E, l'idée étant de trouver une équation ou inéquation (ou un système) caractérisant A.

Exemples. Soit f de $(E, \| \|)$ dans $\mathbb{R}$ continue sur E.

1. $A = \{x \in E : f(x) = 0\}$ est un fermé de E.
2. $A = \{x \in E : f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

3.3.3 Uniforme continuité

Définition 74 (*uniforme continuité*)

$(E, \| \|)$ et $(F, \| \|)$ sont deux $\mathbb{R}$-epaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une fonction de A dans F. On dit que f est ***uniformément continue sur*** *A si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha(\epsilon) > 0)(\forall (x, x') \in A^2) \text{ si } \| x - x' \|_E \leq \alpha(\epsilon) \text{ alors } \| f(x) - f(x') \|_F \leq \epsilon$$

Nota bene. 1. notion stable par changement de normes équivalentes.

2. plus fort que la continuité de f sur A : $\alpha(\epsilon)$ ne dépend pas de x.

Proposition 75

Si f est uniformément continue sur A, f est continue sur A.

Nota bene. La réciproque est fausse. Prendre la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

3.3.4 Applications lipschitzienne

Définition 76 (*application lipschitzienne*)

$(E, \| \|)$ et $(F, \| \|)$ sont deux $\mathbb{R}$-epaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, f une fonction de A dans F, k un réel positif. On dit que f est ***k-lischitzienne sur*** *A si*

$$(\forall (x, x') \in A^2) \;\; \| f(x) - f(x') \|_F \leq k \| x - x' \|_E$$

Nota bene. 1. notion stable par changement de normes équivalentes.

2. si $k < 1$, on dit que f est **contractante**.
3. si N_1 et N_2 sont deux normes sur E, N_1 sont équivalentes si et et seulement si $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont lipshitzienne.

Proposition 77

Si f est lischitzienne continue sur A, f est uniformément continue, donc continue sur A.

Nota bene. La réciproque est fausse. Prendre la fonction racine carré sur $\mathbb{R}^+$.

Exemples. 1. $a \in E$. La fonction $x \mapsto d(x, a) = \| x - a \|$ est 1-lipschitzienne.

2. A une partie non vide de E. La fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
3. $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme infinie. La fonction "projection sur la $i$ème coordonnée" $x = (x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_i$ de (E, ν_∞) dans (E_i, N_i) est 1-lipschitzienne.

3.3.5 Continuité des opérations classiques

Proposition 78 (*norme*)

$(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. $x \mapsto \| x \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ est continue sur E car 1-lipschitzienne.

Proposition 79 (*somme, produit scalaire*)

$(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

1. $(x, y) \mapsto x + y$ de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ est lipschitzienne donc continue sur $(E^2, \| \|_\infty)$.

2. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E est continue sur $(\mathbb{R} \times E, \| \ \|_\infty)$.

Corollaire 80 (*algèbre des limites pour les suites*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E^{\mathbb{N}}$ convergentes de limite a et b respectivement. Soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a + b$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers λa.

3.4 Applications linéaires continues

$(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ sont deux $\mathbb{R}$-epaces vectoriels normés.

Proposition 81

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$, noté $L_C(E, F)$.

Proposition 82 (*caractérisation*)

Soit u dans $L(E, F)$. Il y a équivalence entre :

1. *u est continue sur E.*
2. *u est continue en 0_E.*
3. *u est lipschitzienne sur E.*
4. $(\exists c > 0)(\forall x \in E) \ \ \| u(x) \|_F \leq c. \| x \|_E$.
5. *u est borné sur $B'(0_E, 1)$.*
6. *u est borné sur $S(0_E, 1)$.*

Nota bene. 1. Caractérisation stable par changement de normes équivalentes.

2. $L(E, F) \neq L_C(E, F)$. Prendre la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemples. 1. F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit E l'ensemble des suites bornées sur F muni de $\| \ \|_\infty$, λ un réel, et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans E fixée. Les applications $(u_n)_{n\geq 0} \mapsto (\lambda.u_n)_{n\geq 0}$, $(u_n)_{n\geq 0} \mapsto (v_n.u_n)_{n\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geq 0}$ de E dans E.

2. $E = M_n(\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_\infty$. P et Q sont deux matrices fixées. Les applications $X \mapsto^t X$, $X \mapsto PX$, $X \mapsto PXQ$ et $X \mapsto tr(X)$.
3. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\| \ \|_\infty$. L'application $P \mapsto X^2.P$ de E dans E.

Norme d'une application linéaire continue

Proposition-définition 83

Soit u dans $L_C(E, F)$. Les deux quantités $\sup\limits_{\|x\|_E=1} \| u(x) \|_F$ et $\sup\limits_{\|x\|_E\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$ existent et sont égales. On les note $|||u|||$. De plus, l'application $u \mapsto |||u|||$ de $L_C(E, F)$ dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur $L_C(E, F)$, et

$$(\forall u \in L_C(E, F))(\forall x \in E) \ \| u(x) \|_F \leq |||u|||. \| x \|_E$$

Nota bene. $|||u|||$ est la meilleure constante possible dans les inégalité du type 4, ie

$$si \ \ \| u(x) \|_F \leq M \| x \|_E \ \ alors \ |||u||| \leq M$$

Vocabulaire. $|||u|||$ est la **norme triple** de u (subordonnée à $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$).

Proposition 84

$(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ sont trois $\mathbb{R}$-epaces vectoriels normés, u dabs $L_C(E, F)$, v dans $L_C(F, G)$. Alors $v \circ u$ est dans $L_C(E, G)$ et $|||v \circ u||| \leq |||v|||.|||u|||$.

Proposition 85

On pose $L_C(E) = L_C(E, E)$. $(L_C(E), ||| \ |||)$ est une algèbre normée unitaire.

Proposition 86

1. *Si* $(E, \| \|_E)$ *est complet, alors* $(L_C(E), ||| \, |||)$ *est complète.*
2. *Si* $(E, \| \|_E)$ *est un* $\mathbb{R}$*-evn et* $(F, \| \|_F)$ *un Banach, alors* $(L_C(E, F), ||| \, |||)$ *est complet.*

3.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Théorème 87

Sur un espace vectoriel E *de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Chapitre 4

Compacité

4.1 Définitions, propriétés

Définition 88 (***recouvrement, sous-recouvrement***)

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **recouvrement** *de A toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E telles que $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. On dit alors que $(A_i)_{i\in I}$ recouvre A. Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A, un* **sous-recouvrement de** *$(A_i)_{i\in I}$ est une famille $(A_i)_{i\in J}$ avec $J \subset I$ qui recouvre A.*

Proposition-définition 89 (***partie compacte d'un $\mathbb{R}$-evn***)

Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A une partie de E. On dit que A est **une partie compacte de** *E si l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiées :*

1. *(Bolzano-Weierstrass) de toute suite de points de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A (ie toute suite de points de A a une valeur d'adhérence dans A).*
2. *(Borel-Lebesgue) de tout recouvrement de A par des ouverts de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
3. *de toute intersection vide de fermés de A on peut extraire une sous-intersection vide finie.*

Nota bene. Notion stable par changement de normes équivalentes.

Exemple. 1. Dans $(\mathbb{R}, | \ |)$, un segment fermé $[a, b]$ est compact.

2. $(\mathbb{R}, | \ |)$ n'est pas compact.

Proposition 90 (***propriété des parties compactes***)

1. *Une partie compacte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est fermée et bornée.*
2. *Une partie compacte est complète.*
3. *Un fermé de E inclus dans une partie compacte de E est une partie compacte de E.*

Proposition 91 (***obtention de compacts***)

1. *Une intersection quelconque de parties compactes de E est une partie compacte de E.*
2. *Une réunion finie de parties compactes de E est compacte.*
3. *$(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. On muni $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ de la norme infinie ν_∞. Si A_i est une partie compacte de (E_i, N_i) (pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$) alors $A = A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de E.*

Corollaire 92 (***important***)

Les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont les fermés bornés.

4.2 Compacité et continuité

Proposition 93 (***image continue d'un compact***)

$(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E et f une application continue de A dans F. Alors $f(A)$ est une partie compacte de F.

Proposition 94 (*Heine*)

f une application de A dans F où A est une partie compacte de E. Si f est continue sur A, alors f est uniformément continue sur A.

Cas des fonctions à valeurs réelles

Proposition 95 (*fonction continue sur un compact*)

$(E, \| \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A une partie compacte de E non vide, f une fonction de A dans $\mathbb{R}$ continue sur A. Alors f est bornée et atteint ses bornes, ie les quantités $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ existent et il y a un coupe (x_0, y_0) de A^2 tel que $m = f(x_0)$ et $M = f(y_0)$.

Corollaire 96

1. *$(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, A une partie compacte de E non vide et f une application continue de A dans F. Alors $\inf\limits_{x \in A} \| f(x) \|_F$ et $M = \sup\limits_{x \in A} \| f(x) \|_F$ existent et sont atteints.*
2. *a et b deux réels. Soit E l'espace $\mathcal{C}([a, b], F)$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans F. $\| f \|_\infty = \sup\limits_{x \in A} \| f(x) \|_F$ définit bien une norme sur E.*
3. *Si A est une partie compacte de E, $\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(A, F)$.*

Nota bene. De nombreux problèmes d'existence (analyse, géométrie) peuvent se résoudre en étant interprétés en terme de min ou max d'une fonction continue sur un compact.